GESTIÓN DEL PROFESOR PARA GENERAR CAMBIOS EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ASOCIADOS A LA CONSTRUCCIÓN DE TEOREMAS

Zaira Marcela López García

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNONLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2020

GESTIÓN DEL PROFESOR AL GENERAR CAMBIOS EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ASOCIADOS A LA CONSTRUCCIÓN DE TEOREMAS

Zaira Marcela López García

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título Licenciado en Matemáticas

Asesor: Claudia Marcela Vargas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNONLOGÍA
Departamento de Matemáticas

Bogotá, D.C.
2020

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"GESTIÓN DEL PROFESOR PARA GENERAR CAMBIOS EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ASOCIADOS A LA CONSTRUCCIÓN DE TEOREMAS"**, elaborado por la estudiante **ZAIRA MARCELA LOPEZ GARCIA**, identificada con el Código **2016140057** y Cédula **1007703157**, el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y cuatro** (**44**) puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas.**

En constancia se firma a los tres (3) días del mes de mayo de 2021.

Claudia

Mg. CLAUDIA MARCELA VARGAS GUERRERO
Directora del Trabajo de grado

Orlando Aya C.

Mg. ORLANDO AYA CORREDOR
Jurado del Trabajo de grado

Dr. OSCAR JAVIER MOLINA JAIME
Jurado del Trabajo de grado

AGRADECIMIENTOS

A los integrantes del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría. En especial, a la profesora Leonor Camargo por ser un soporte fundamental durante mi estadía como monitora en dos proyectos de investigación de la Universidad Pedagógica Nacional.

A mi asesora Claudia Vargas por la dedicación y el tiempo que implementó en mi para elaborar el trabajo de grado. Además, agradezco por haberme acompañado y tenido paciencia en cada una de las sesiones virtuales, a pesar de las distintas situaciones que surgieron mediante el transcurso de la escritura del documento.

A los profesores y algunos administradores del Departamento de Matemáticas, quienes fueron parte fundamental para no rendirme y seguir con esta hermosa carrera. También, a los profesores Ingrith, Claudia, Camilo, Donado, Alejandro, William y Leonor les agradezco por confiar en mí y darme palabras de aliento en momentos en los que realmente las necesitaba.

A mis amigos de la universidad por los consejos, las risas, las colaboraciones y el acompañamiento que me dieron. Me hicieron dar cuenta que el estar rodeada de personas que te quieren y te valoran, resulta de suma importancia para disfrutar al máximo cada instante de la vida.

A la Universidad Pedagógica Nacional porque al pasar del tiempo, aquel lugar se convirtió en mi segundo hogar.

A mi familia por apoyarme tanto económica como emocionalmente durante mi estadía en la universidad, especialmente a mis padres.

CONTENIDO

LISTA DE ILUSTRACIONES

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

En este documento presento el trabajo de grado desarrollado como requisito para obtener el título de Licenciada en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). El estudio reportado empezó a gestarse en el marco del proyecto *Gestión de voces de los estudiantes en la clase de Geometría* (DMA-489-19), el cual fue desarrollado por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$) durante el año 2019, con el apoyo del Centro de Investigaciones de la UPN. El proyecto tuvo como propósito identificar, caracterizar y ejemplificar la gestión de tres profesores de geometría, de colegios y cursos diferentes, tendientes a promover el surgimiento y el desarrollo de la voz de los estudiantes. En esa investigación, participé como monitora y estuve acompañando los procesos de observación, recolección de información y análisis.

Para el estudio reportado en este documento, se retomaron y transcribieron las grabaciones realizadas a un profesor de grado octavo cuyo objetivo de enseñanza fue involucrar a los estudiantes en la construcción de un sistema teórico local, promoviendo la producción de teoremas. La gestión de profesor tendiente a lograr este propósito llamó mi atención, por lo cual decidí caracterizar las acciones que el profesor realiza para promover y generar cambios en el discurso de los estudiantes asociado a la construcción de un teorema. Es este último el objetivo del estudio reportado en este documento.

El documento está dividido en cinco capítulos. En el primero, presento la delimitación del problema que se pretende resolver en este estudio, describiendo la problemática, la justificación del estudio y los objetivos tanto generales como específicos. Estos, a grandes rasgos, quedaron plasmados en el párrafo anterior. El segundo capítulo muestro el marco de referencia que sustenta el estudio, allí hago énfasis en dos asuntos: teorema y discurso matemático. En el tercer capítulo menciono el diseño metodológico el cual orienta el desarrollo de la propuesta, como lo son la estrategia investigativa, el contexto experimental, la descripción de la población, la recolección de datos y la categoría de análisis. En el cuarto capítulo reporto el análisis de fragmentos de transcripciones correspondiente a momentos de la clase en los cuales el profesor elabora un teorema junto con la ayuda de los estudiantes y presento una síntesis de resultados con respecto a las acciones del profesor tendientes a desarrollar el discurso de los estudiantes en torno a los tres elementos que conforman un teorema: el enunciado, la demostración y el sistema teórico. En el quinto capítulo expongo las conclusiones de la investigación según los objetivos específicos elaborados en el trabajo y sus posibles proyecciones investigativas.

CAPÍTULO 1. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

En este capítulo se presentan los aspectos que dieron lugar al planteamiento del problema de investigación de la presente propuesta, estos son: la descripción de la problemática; la justificación del estudio; y el objetivo general, junto con sus objetivos específicos propuestos para desarrollar el estudio.

1.1.DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

El grupo de investigación $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ del grupo Didáctica de la Matemática de la UPN, en el año 2018, durante el desarrollo del proyecto de investigación *Voces de los estudiantes en la clase de Geometría* (DMA-461-18), evidenció que en algunas clases se proporcionaba a los estudiantes la oportunidad de participar y exponer sus ideas respecto a asuntos matemáticos. No obstante, tales opiniones no necesariamente se convertían en el insumo para la construcción de significados compartidos. Esto llevó a generar un segundo proyecto de investigación titulado G*estión de voces de los estudiantes en la clase de geometría*, cuyo propósito fue identificar, caracterizar y ejemplificar la gestión que un conjunto de profesores de Geometría efectúa con las expresiones discursivas emitidas por los estudiantes al comunicar una idea acerca del asunto matemático sobre el cual versa la clase. En particular, resultaron de interés la gestión de aquellas expresiones inteligibles que se caracterizaban por tener un carácter no impostado.

La situación expuesta durante el segundo proyecto de Investigación hizo evidente que algunos de los profesores, al intentar aprovechar las ideas de los estudiantes como impulsoras para la construcción de un discurso matemático, se enfrentan a un objetivo complejo de conseguir (Kaur, 2013). Esto se debe a que convertir en insumos las expresiones de los estudiantes, implica modificar la interacción pregunta - respuesta monosilábica-evaluación e insistir en que los estudiantes dejen de dirigirse únicamente al profesor con verbalizaciones sueltas o frases cortas. Además, se necesita incentivar a los estudiantes para que se comuniquen en un lenguaje claro y completo y se escuchen unos a otros. Esto implica, generar un ambiente de clase en el cual el lenguaje utilizado pueda ser interpretado por cada uno de sus miembros y ellos tengan la oportunidad de argumentar su acuerdo o desacuerdo con las ideas expuestas en la clase.

Al estar vinculada como monitora de investigación durante el desarrollo de los proyectos mencionados, tuve la oportunidad de observar y transcribir clases consecutivas de geometría de grado octavo y, asimismo analizar unas de ellas. El objetivo de enseñanza de estas clases era involucrar a los estudiantes en la construcción de un sistema teórico local. De tales sesiones, llamó la atención las acciones del profesor para poder involucrar a los estudiantes en la producción de teoremas, el cual en el documento se entenderá como la formulación del enunciado, la elaboración de su demostración y en la construcción del sistema teórico que lo respalda (Mariotti, 1997), ya que en tales sesiones de clase se evidenciaba la intención del profesor para involucrar a los estudiantes en cada sesión.

El interés por centrarme en las acciones del profesor para promover la construcción de teoremas surge del hecho de que es poco frecuente que las clases de matemáticas de educación básica y media se centren en el acto de construir colectivamente una teoría matemática en colaboración con los estudiantes. Mariotti, et al. (1997) aclaran que, para que lo anterior sea posible, es fundamental el papel del profesor como mediador cultural y cognitivo. Es decir, lograr que los estudiantes tengan una perspectiva amplia del papel de los teoremas en relación con la construcción de un sistema teórico, requiere de un profesor que introduzca al estudiante en este tipo de prácticas.

Por esta razón, el propósito del trabajo de grado es caracterizar acciones del profesor para promover cambios en el discurso de los estudiantes, cuando están inmersos en tareas que implican la construcción de teoremas.

1.2. JUSTIFICACIÓN DE ESTUDIO

El grupo de investigación $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ durante el desarrollo de los dos proyectos de investigación, se enfocaron en el papel que cumple el lenguaje y la comunicación de ideas en las clases de Matemáticas, desde una perspectiva sociocultural. La relevancia de estudiar el lenguaje matemático está asociada con asumir el aprendizaje de la disciplina, como un cambio en el discurso matemático, de tal forma que el estudiante avance hacia formas de comunicar y actuar que son propias de la comunidad matemática (Sfard, 2008).

La importancia de la comunicación en el aprendizaje es resaltada en los Lineamientos Curriculares (1998), ya que la describen como "la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas" (p. 11). Allí se hace notar que para que los estudiantes puedan comunicarse matemáticamente, se necesita establecer un ambiente escolar en el que la comunicación sea una práctica natural, que ocurra regularmente, y en el cual la discusión de ideas sea valorada (MEN, 1998). Las acciones del profesor pueden conllevar a establecer o a impedir el desarrollo de un ambiente con estas características.

Martin, et al. (2005) exponen que las decisiones del profesor influyen en la participación de todos los miembros de la clase para la construcción del conocimiento. Por tanto, es responsabilidad del profesor ayudar a los estudiantes a producir y comunicar argumentos o justificaciones válidas de acuerdo con su nivel escolar. Asimismo, durante la comunicación de resultados obtenidos a través de la actividad matemática del estudiante, el profesor puede favorecer la construcción de conocimiento realizando preguntas, haciendo sugerencias, buscando que los estudiantes se involucren genuinamente con la actividad, y que expresen con claridad sus ideas (Camargo & Perry, 2006).

Investigadores y profesores como Martín et al. (2005); Ospina y Plazas (2011); Conner, et al. (2014) resaltan que, siendo la prueba y el razonamiento aspectos fundamentales de las matemáticas, es necesario identificar las acciones del profesor que promueven ambientes que permiten a los estudiantes realizar conjeturas, proporcionar justificaciones, formular cadenas de razonamiento y mejorar sus habilidades comunicativas. A su vez, investigadores como Anthony y Walshaw (2009), Sfard (2008) y Goos (2004) indican que los discursos escolares matemáticos que involucran la explicación, la argumentación y la defensa de ideas por parte de los estudiantes, se convierte en una característica fundamental para tener una experiencia de calidad en el aula. Para ello, observan las acciones del profesor y las normas socio matemáticas que caracterizan clases en las cuales se evidencian discursos con estos rasgos.

Mariotti, et al. (1997) indican que la cultura de cualquier clase de geometría está determinada por el discurso matemático dirigido por el profesor. Lograr establecer una cultura de clase que este en correspondencia con lo que significa producir un teorema en matemáticas, implica por parte del profesor, promover que los estudiantes desarrollen una actitud espontanea hacia la validación teórica; reconocer la diferencia entre argumentación y demostración como un pilar para lograr dar sentido a los teoremas; generar incertidumbre respecto a la veracidad de un enunciado; seleccionar o diseñar cuidadosamente situaciones problema cuya solución requiere la producción de una conjetura y su demostración.

1.3. OBJETIVOS

Se consideran los siguientes objetivos como orientadores para el estudio que se presenta en el documento.

1.3.1. Objetivo General

Caracterizar acciones de un profesor de grado octavo, que favorece un ambiente participativo, para promover y generar cambios en el discurso de los estudiantes, cuando están inmersos en tareas que implican la construcción de un teorema.

1.3.2. Objetivos específicos

- Fundamentar teóricamente el asunto de estudio (discurso matemático, producción de un teorema y acciones del profesor para favorecer el discurso) a partir de la revisión de la literatura.

- Seleccionar episodios de una clase de geometría de grado octavo en los cuales se evidencie acciones del profesor tendientes a promover un cambio en el discurso respecto a la producción de teoremas.

- Proponer una herramienta analítica con un conjunto de acciones que un profesor de geometría pueda realizar para favorecer cambios en el discurso respecto a la producción de teoremas, a partir de la revisión de los referentes teóricos.

- Identificar las acciones que utiliza un profesor de grado octavo para favorecer cambios en el discurso respecto a la producción de teoremas.

A continuación, se presentará el marco de referencia del trabajo de grado teniendo en cuenta la justificación del estudio y los objetivos presentados en este capítulo, el cual ayuda a tener un enfoque en lo que se entenderá por teorema y discurso matemático en el documento.

CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA

El presente trabajo tiene como objetivo principal caracterizar las acciones del profesor para promover y generar cambios en el discurso de los estudiantes, cuando están inmersos en tareas que implican la construcción de un teorema. Por tal razón, se considera importante enfocar el marco teórico en artículos e investigaciones que aporten elementos teóricos en relación con: la caracterización de un teorema y su producción; y la construcción de significados en el aula de clase a partir de un discurso matemático.

2.1. TEOREMA

Un teorema, particularmente en geometría, es la articulación entre tres elementos: el enunciado o proposición, su demostración y la teoría que la soporta. Es decir, un teorema se caracteriza por estar inscrito en un marco de referencia constituido por un conjunto de principios y reglas de deducción que permiten validar el enunciado. Esta validez se obtiene de aceptar la veracidad de las hipótesis, de un conjunto de axiomas y de las reglas de inferencia establecidas dentro de la teoría (Mariotti, 2006; 1997). Esta perspectiva de teorema está ligada a una construcción axiomática, rigurosa y formal de las matemáticas, que es esencial para una comunidad (Molina, Luque y Robayo, 2014 y Mariotti, 2006).

Cabe aclarar que la definición de teorema expuesta aplica para la mayoría de los teoremas que han sido aceptados en la comunidad matemática[1]. Un ejemplo de ello sería el último teorema de Fermat ya que tiene un enunciado elaborado por Pierre de Fermat, el cuál es:

> "Si n es un número entero mayor o igual que 3, entonces no existen números enteros positivos x, y, z, tales que se cumpla la igualdad $x^n + y^n = z^n$"

La demostración, desarrollada años después por Andrew Wiles con ayuda de varios matemáticos entre ellos Richard Taylor, fue realizada a partir del Teorema de Tanaiyama-

[1] Actualmente, en la comunidad matemática empieza a aceptarse que existan demostraciones generadas por un computador, como por ejemplo sucede en la demostración del Teorema de los cuatro colores, el cual indica que "cualquier mapa geográfico con regiones continuas, puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color. y fue demostrado muchos años después a través del tiempo. Si bien tiene un enunciado y una demostración, la teoría como se sustenta es por medio de casos realizado por computadoras.

shimura, combinada con el teorema de Ribet. Combinada con una teoría bastante explicita con teoría de números y fue surgiendo también con teoremas que fueron surgiendo mientras fue transcurriendo el tiempo.

Centrando la idea de Teorema como la describe Mariotti (1997), en la Tabla 1 se reporta la definición que se utilizó en este trabajo de grado para cada uno de los elementos que conforman el teorema. Las mismas permiten entender la demostración en el marco de una comunidad de clase de matemáticas.

Enunciado	Demostración	Teoría
Proposición que puede formularse como una proposición condicional. En esta, el antecedente debe ser válido en el marco de la teoría (los objetos y relaciones involucrados en él deben estar perfectamente definidos, y sus correspondientes existencias demostradas) y la relación de dependencia que expresa debe ser validada por medio de una demostración (Echeverry, Molina, Samper, Perry, & Camargo, 2012; Molina & Samper, 2019; Molina, 2019)	Argumento matemático que consta de una secuencia conectada de afirmaciones que sustenta el enunciado del teorema. Tiene las siguientes características: 1) Utiliza declaraciones aceptadas por la comunidad; 2) Emplea modos de argumentación deductiva que son válidos y conocidos por la comunidad; 3) se comunica usando modos de representación de argumentos que son apropiados y conocidos por la comunidad (Stylianides, 2016).	Conjunto de enunciados que han sido aceptados en la comunidad (v.g. definiciones, postulados, teoremas, procedimientos establecidos), modos deMar argumentación (v.g. uso de reglas lógicas de inferencia como modus ponens, modus tollens, reducción al absurdo; uso de definiciones para inferir afirmaciones; pruebas por contraejemplo), y modos de representar una demostración (diagramas, tablas, lingüístico, etc.) (Stylianides, 2016; Mariotti, 2006).

Tabla 1. Elementos que conforman un teorema: enunciado, demostración y teoría

2.2. DISCURSO MATEMÁTICO

Desde una perspectiva sociocultural, algunos investigadores se han preocupado por indagar acerca de la relación entre los procesos de comunicación en el aula de clase y su incidencia en la construcción de significado; el papel del lenguaje en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; y los cambios continuos, dinámicos e interactivos en las formas de expresión de los miembros de una comunidad de clase (Morgan y Sfard 2016; Clarke Xu y Wan 2013; Kaur 2013; Ávila, 2018; Sfard, 2008). Estas preocupaciones, en torno al lenguaje y su incidencia en el aula, están en correspondencia con asumir que la relación entre la actividad social, los intercambios comunicativos y el pensamiento individual, son una característica esencial y distintiva de la cognición humana (Mercer, 2012).

En este estudio, se adopta la perspectiva discursiva establecida por Sfard (2008) y discutida por Morgan y Sfard (2016) según la cual, las matemáticas pueden conceptualizarse útilmente como un discurso, es decir, como las formas de comunicación utilizadas en las prácticas matemáticas de una comunidad. Los cambios en esta comunicación, que puede ser con uno mismo o con otro, generan cambios en la naturaleza de las matemáticas con las que se espera que un miembro de la comunidad participe. Así, el discurso específico de una comunidad consiste en una colección de términos, definiciones, principios explicativos, reglas de argumentación y conocimiento de base, que son compartidos por los miembros. Por ello es posible hablar del discurso matemático en términos del uso del lenguaje para la comunicación y tratamiento de los objetos usados en las prácticas matemáticas. El estudio, se centra en el discurso matemático que se genera en una comunidad específica: el aula de clase de matemáticas.

A pesar de que autores como Krummheuer (2007) defiende la idea de que, en el aula de clase, y más aún de matemáticas, es poco frecuente que se generen cambios en el discurso de algún tema específico, otros autores como Sfard (2008), Radford y Barwell (2016), Morgan y Tang (2016) hacen relevante el hecho de que la participación a través de la comunicación en las prácticas discursivas es fundamental para poder llevar a cabo un aprendizaje significativo. Para ellos, aprender matemáticas hace referencia, no solo a la resolución de problemas, sino al proceso de transición discursiva que va desde situaciones que predominan expresiones comunes, informales y cotidianas al comunicar las ideas, más conocido como "lenguaje natural", hasta situaciones que se vuelven más inclusivas, apropiándose cada vez más de los elementos y términos históricos culturales comunicativos, conocido como "lenguaje matemático o formal" (Sfard 2008, y Morgan y Tang 2016). Parte importante de este proceso es el poder comunicar las ideas con libre expresión, para poder debatir, comunicar y expresar las ideas propias a otros miembros de la clase, sin ningún tipo de restricción.

Dentro del enfoque, el término discurso matemático se distingue por cuatro rasgos: vocabulario y sintaxis, mediadores visuales, rutinas y narrativas. A continuación, se explica cada uno de los términos y su relación con la producción de teoremas. Además, presento un conjunto de acciones del profesor que favorecen el desarrollo del discurso de los estudiantes en la clase de geometría, propuesto por el grupo de investigación $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$.

2.2.1. Vocabulario y sintaxis

Hace referencia al uso de términos especializados o no especializados, que usa una comunidad específica para referirse a los objetos matemáticos y sus propiedades, de acuerdo con el entorno de esta. El uso del vocabulario especializado, según Morgan & Tang (2016), es probablemente la característica más estudiada y distintiva del discurso matemático, ya que en este rasgo se han enfocado la mayoría de los investigadores (Morgan, 2005).

El uso de vocabulario especializado es un componente esencial de la actividad matemática, ya que asignarle un nombre a un objeto o un proceso con sus respectivas propiedades y atributos específicos, hace que esté disponible en el pensamiento matemático que se esté desarrollando en aquella comunidad especifica. Así, el uso del vocabulario incluye considerar dos aspectos: los términos que se usan para referirse a los objetos y procesos presentes en el ambiente escolar, y la sintaxis requerida para utilizar estos términos.

Al respecto, Morgan y Tang (2016) afirman que una palabra o un conjunto de palabras se constituye en un término especializado del discurso matemático de una comunidad si:

- Tiene una definición matemática y el término se usa de acuerdo con esa definición. Por ejemplo, si en una comunidad el triángulo isósceles se define como un triángulo que tiene dos lados congruentes, y un miembro de la comunidad afirma que "un *triángulo* ***no*** *es isósceles* porque tiene tres lados congruentes", entonces aunque el término "triángulo isósceles" se utilizan para nombrar un objeto matemático, para el sujeto que emite la oración, la misma no se constituye en un término especializado, pues su uso no está en correspondencia con la definición institucionaliza en la comunidad.

- Se usa ampliamente en el aula de matemáticas y/o se encuentra en varios fragmentos de textos distintivos de las matemáticas.

- Tiene asociado una o más expresiones simbólicas para hacer referencia a los objetos que nombran. Por ejemplo, el uso de la notación geométrica ($\overleftrightarrow{AB}$, $\cong, \sim, \parallel, \perp$).

Una palabra que se utilice para denotar objetos y procesos matemáticos, que no cumplan las anteriores condiciones, se considera un término no especializado. Incluyendo allí, los términos utilizados de manera cotidiana que hacen parte de los discursos coloquiales, usados por los estudiantes.

Por otra parte, la sintaxis se refiera a la forma en que se espera que los miembros de la comunidad se expresen de los objetos matemáticos y estructuren las oraciones para referirse a los mismos. En general, se refiere al uso común o especializado de la lengua natural (Duval, 1999). Así, para referirnos a los objetos matemáticos, un miembro hace uso de una lengua (en nuestro caso, el castellano), pero la forma como hace uso de esta, determinar si corresponde con la sintaxis esperada en la comunidad.

La Tabla 2 reporta acciones con las que el profesor impulsa la transición discursiva relacionada con el vocabulario y su uso.

Promover y desarrollar la voz	Actuar sobre la voz o con ella
• Pide de manera directa usar lenguaje especializado al expresarse • Indaga sobre el significado de un término especializado incluido en una verbalización • Indaga por el uso que se debe dar a un término especializado en una verbalización • Indaga por el uso de conectores o cuantificadores idóneos para expresar con precisión lo que se quiere expresar.	• Señala uso inadecuado del lenguaje matemático en una verbalización • Comenta y/o da indicaciones sobre el uso de vocabulario o la sintaxis • Introduce vocabulario y sintaxis especializados. • Contrapone el uso que hace del vocabulario y la sintaxis especializados al respectivo uso en verbalizaciones específicas de los estudiantes. • Introduce o establece convenios a partir de los cuales la expresión de grupos nominales complejos se flexibiliza. • Destaca el uso que hace de conectores o cuantificadores en sus propias expresiones o en el parafraseo. • Destaca (con preguntas o comentarios) la diferencia de significados atribuibles a dos expresiones que difieren en sus cuantificadores o conectores lógicos. • Usa elementos de la lógica para explicar diferencias en el significado de expresiones haciendo referencia a conectores o cuantificadores.

Tabla 2. Acciones del profesor para favorecer el desarrollo del vocabulario y la sintaxis (fuente: Proyecto de investigación Gestión de voces de los estudiantes en la clase de geometría)

Respecto a la producción de teoremas, asuntos como el nombre que se le asigna al teorema para identificarlo dentro de la teoría o la forma condicional que exigen la sintaxis del enunciado, son asuntos concernientes al vocabulario.

2.2.2. Mediadores visuales

Los mediadores visuales del discurso matemático son objetos tangibles que contribuyen a desarrollar procesos de comunicación respecto a objetos matemáticos. Dado que estos últimos son abstractos, los mediadores se crean con el fin de generar representaciones manipulables de dichos objetos. Se incluyen diferentes tipos de artefactos simbólicos como palabras escritas, símbolos algebraicos, diagramas, representaciones gráficas (papel y lápiz o GeoGebra), entre otros, que contribuyen a generar un sistema semiótico alrededor de los términos matemáticos (Morgan y Sfard, 2016).

En relación con los teoremas, algunos artefactos que ayudan a hacer ostensible diferentes partes de este son los diagramas que se usan para reportar su demostración como los diagramas a tres columnas (qué sé, qué uso, qué concluyo) o afirmación-razón que se usan como apoyo para referirse al enunciado del teorema o a partes de su demostración (Samper y Molina, 2013) o las construcciones geométricas que se corresponden con la relación de dependencia que expresa el enunciado del teorema.

Las acciones con las que el profesor podría impulsar la transición discursiva relacionada con los mediadores visuales y su uso según el proyecto de investigación se reportan en la Tabla 3.

Promover y desarrollar la voz	**Actuar sobre la voz o con ella**
Pide usar mediadores visuales en la exposición discursiva pública.	• Usa ostensivamente mediadores visuales en sus explicaciones e ilustraciones o cuando amplifica la expresión del estudiante en el tablero. • Propone el uso de un mediador más eficaz al empleado para apoyar la comunicación de una idea • Da realimentación sobre cómo usar mediadores visuales. • Establece relaciones entre dos o más mediadores visuales

Tabla 3. Acciones del profesor para favorecer el desarrollo de los mediadores visuales (fuente: Proyecto de investigación Gestión de voces de los estudiantes en la clase de geometría)

2.2.3. Narrativas

Una narrativa puede ser cualquier texto hablado o escrito como descripciones, relaciones y actividades de objetos. En general, es un conjunto de proposiciones sobre hechos o procedimientos o argumentos que emplea una comunidad y las etiqueta como verdaderas. En los discursos matemáticos, para ser aprobadas, las narrativas tienen que ser construidas y estructuradas atendiendo a reglas bien definidas. Las narrativas que son aprobadas por una comunidad se convierten en una base para construir nuevas narrativas de este tipo (Sfard, 2008).

Respecto a los teoremas, la demostración se basa en argumentos matemáticos sustentados por afirmaciones, utilizando una teoría para concluir el consecuente del enunciado del teorema, a lo que se espera construir un conjunto de proposiciones de forma secuencial para poder validar el teorema e institucionalizarlo con la comunidad y sea parte del sistema teórico del curso (Stylianides, 2016). Por ende, tanto el enunciado, su demostración, los argumentos que conforman la demostración y las proposiciones que se consideran válidas en el marco de la teoría, se consideran narrativas.

La Tabla 4 representa las acciones con las que el profesor podría impulsar la transición discursiva relacionada con las narrativas y la objetificación[2] de estas:

Promover y desarrollar la voz	Actuar sobre la voz o con ella
• Pide relatos relacionados con proposiciones (postulados, conjeturas, teoremas), definiciones, lenguaje matemático y procedimientos, que son resultado de exploraciones, de recuerdos o de sucesos de la clase. • Pide ampliar, corregir, reelaborar, cambiar la enunciación hecha de una narrativa específica • Llama la atención sobre una verbalización o parte de ella. • Pide comparar enunciaciones desde el punto de vista del significado, señalando diferencias y sus consecuencias. • Objeta abiertamente una narrativa. • Pide argumentar una narrativa o una acción. • Formula preguntas o solicitudes sobre procedimientos encaminadas a propiciar la alienación[3]	• Compara enunciaciones desde el punto de vista de significado, señalando las diferencias y consecuencias que producen estas. • Ejemplifica o sugiere cómo o cuál debería ser una narrativa apropiada. • Modifica expresión (verbal o gráfica) de un estudiante • Aprueba o resalta la narrativa de un estudiante. • Muestra la reificación como una manera especializada de expresar narrativas sobre procesos o procedimientos. • Muestra la alienación como una manera especializada de expresar narrativas.

[2] El discurso matemático al presentar las narrativas aceptadas de manera objetiva, que no depende de la acción humana se conoce como objetificación (Sfard, 2008).
[3] La alienación se refiere a que, para generar una proposición matemática en el marco de un sistema teórico, la proposición debe ser escrita de tal forma que no exista el individuo en la acción. Por ejemplo: no es lo mismo decir “construí dos rectas y miré que se intersecan en un solo punto” a decir “en un plano, dos rectas se intersecan en un solo punto”.

Tabla 4 Acciones del profesor para favorecer el desarrollo de las narrativas (fuente: Proyecto de investigación Gestión de voces de los estudiantes en la clase de geometría)

2.2.4. Rutinas

Las rutinas hacen referencia a los patrones que caracterizan el discurso. Específicamente, se pueden observar las regularidades del discurso matemático, ya sea observando el uso de palabras y mediadores visuales o siguiendo el proceso de creación y estructuración de narrativas sobre números o formas geométricas. Estos patrones se pueden reconocer en cualquier aspecto del discurso matemático como, por ejemplo, cuando se categoriza las formas matemáticas, en los modos matemáticos de atender un entorno, las formas de ver similitudes y diferencias en situaciones, entre otros. Gracias a aquellas regularidades que se evidencian en la actividad humana, los participantes pueden interpretar lo que otros dicen y están en la capacidad de decidir qué clase de respuesta puede esperar a tener. En la mayoría de los discursos, los participantes o interlocutores no son conscientes de que los discursos matemáticos realizados y sus acciones, extienden aquellas regularidades estructurales, y de ellos no se puede decir que "sigan las reglas" del discurso de una manera consciente e intencional. Así, una característica de la actividad matemática es que el locutor debe tratar de hacer explícitas algunas de sus reglas. De hecho, intentos meta discursivos como formular definiciones que después estarán en el uso de las palabras matemáticas, constituyen parte integral del discurso matemático (Sfard, 2008).

En la Tabla 5, se consideran las acciones con las que el profesor podría impulsar la transición discursiva relacionada con rutinas:

Promover y desarrollar la voz	Actuar sobre la voz o con ella
• Propone situaciones de tarea cuya solución incluye una secuencia común de acciones • Pide enunciar la forma rutinaria de enfrentar algunas tareas. • Pregunta por la forma en que se obtienen los resultados de una tarea y cómo se llega a ciertas conclusiones • Indaga sobre la posibilidad de usar un procedimiento u otro para resolver una tarea.	• Hace ostensiva una determinada rutina. • Explicita aspectos de un procedimiento que sirven de control sobre este. • Sugiere cómo efectuar un procedimiento rutinario.

Tabla 5 Acciones del profesor para favorecer el desarrollo de rutinas (fuente: Proyecto de investigación Gestión de voces de los estudiantes en la clase de geometría)

Los rasgos característicos ilustrados y definidos anteriormente de rutinas pretenden responder a cuatro normas sociomatemáticas identificadas en cursos de geometría (escolares y universitarios) basados en la resolución de problemas con el uso de la geometría dinámica que tiene como objetivo que los estudiantes experimenten la construcción deductiva de un sistema teórico local para la geometría (Echeverry, Molina, Samper, Perry, y Camargo, 2012; Molina y Samper, 2019; Molina, 2019). Estas normas son:

- N_1: El enunciado de un potencial teorema se escriben como una proposición condicional (si…, entonces…).
- N_2: El antecedente del enunciado del potencial teorema debe ser válido en el sistema teórico disponible para el curso. Esto es, los objetos y relaciones involucrados en él deben estar perfectamente definidos, y sus correspondientes existencias demostradas.
- N_3: El enunciado del potencial teorema se valida con elementos del sistema teórico disponible para el curso.
- N_4: El enunciado del potencial teorema se demuestra haciendo una cadena deductiva de elementos del sistema teórico disponible para el curso.

El marco teórico permitió construir la herramienta analítica utilizada para identificar acciones del profesor tendientes a promover la producción de teoremas en una clase de geometría. Estas se presentan el siguiente capítulo, correspondiente al diseño metodológico.

CAPÍTULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO

La metodología realizada en el trabajo de grado está conformada por: la estrategia investigativa implementada, el contexto experimental, la descripción de la población, la recolección y construcción de datos investigativos y las categorías de análisis.

3.1.ESTRATEGIA INVESTIGATIVA

La estrategia investigativa empleada es denominada *basada en prácticas usuales* (Lesh y Kelly, 2000). Consiste en realizar un encuentro con escenarios educativos para identificar, caracterizar, describir e interpretar un fenómeno social particular que se presenta en un contexto escolar específico, la clase de matemáticas, con la asistencia conjunta del profesor y de los estudiantes.

Para implementar la estrategia, se comienza por recolectar las evidencias que permite describir la profundidad del fenómeno, por medio de la observación. En este estudio, la observación de clases consecutivas en un curso específico de geometría. Posteriormente, se procede a construir los datos investigativos, en este caso por medio de transcripciones de los datos recolectados y la fragmentación de posibles episodios para analizar. Finalmente, se construye una herramienta analítica, para realizar el respectivo análisis de la información recolectada por medio de categorías que empiezan a construirse incluso durante la recolección de evidencias.

La diferencia con otras estrategias investigativas radica en el interés de caracterizar un fenómeno no de manera aislada, sino de manera situada donde tienen lugar las prácticas desde la perspectiva de los participantes, pues estas se construyen de acuerdo con las maneras en que los individuos aprenden[4]. En este estudio, el fenómeno observado son las interacciones entre un profesor de grado octavo y sus estudiantes para producir un teorema.

A continuación, ampliaremos la información respecto a las características del curso y de las clases observadas.

[4] Los participantes corresponden a los investigadores y a las personas que hacen parte de la clase de matemáticas normalmente.

3.2. CONTEXTO EXPERIMENTAL

Los eventos que se analizan provienen de tres clases de geometría con una duración de una hora por sesión que se desarrollaron durante el primer semestre de 2018, con 26 estudiantes de grado octavo, en un colegio público de Bogotá[5]. El salón en el que se lleva a cabo cada una de las sesiones cuenta con nueve mesas y en cada una se ubican cuatro estudiantes; el salón está equipado con un televisor con proyector, un tablero pequeño y 30 tabletas utilizadas en la mayoría de las clases observadas. En general, el profesor propone tareas para ser resuelto con geometría dinámica, en grupos de mínimo tres y máximo cuatro estudiantes. Durante la discusión grupal, el profesor, por medio de preguntas, invita a los estudiantes a comunicar y justificar los resultados obtenidos. Habitualmente, los estudiantes le contestan al profesor cuando él les pregunta y la mayoría muestra interés por comunicar sus resultados. Por la ubicación de las mesas, es común que los estudiantes susurren con sus compañeros de grupo; esto lleva a que constantemente, el profesor realice llamados de atención en los que enfatiza en la importancia de escuchar al estudiante que esté hablando.

Como se había mencionado en la descripción de la problemática, escrita en el primer capítulo del documento, el profesor tiene planeado empezar a desarrollar un sistema teórico local de geometría desde cero con el curso de octavo. Así, durante la mayoría de las clases grabadas, el profesor propone tareas o situaciones tareas el cual implica utilizar la herramienta GeoGebra para su solución, para que se construya conjuntamente los elementos que harán parte del sistema teórico[6] local del curso de geometría. Después de dar un tiempo estimado para explorar y resolver el problema, realiza una socialización grupal. En esta, se enfoca en que los estudiantes expliciten el procedimiento realizado en el programa de geometría dinámica, formulen la primera propuesta de forma condicional y argumenten la relación encontrada. A su vez, introduce nuevas proposiciones que se requieran para demostrar la afirmación y explicita algunas normas

[5] Se aclara que por pérdida de información en videos, no se pudieron realizar la totalidad de transcripciones ni volver a ver los videos de clases anteriores o posteriores a las analizadas

[6] En adelante usaremos la expresión *sistema teórico* para referirnos al conjunto de proposiciones (definiciones, postulados, teoremas, supuestos) que han sido acreditados por la comunidad. En tal sentido, el sistema teórico es una parte de la teoría que respalda el teorema, pero no son sinónimos.

respecto a la forma cómo se debe formular el enunciado y la demostración de los teoremas.

En la primera sesión, el profesor inicia la clase preguntando por definiciones, postulados o teoremas que implican la relación entre algunos objetos matemáticos vistos en clases o cursos anteriores, esto ayudó a que el profesor explicite lo que es un teorema y postulado, además de recordar lo que significa una definición en matemáticas. Luego, el profesor es quien introduce el primer postulado con el fin de introducir y recordar la notación matemática de los objetos allí "nombrados":

Postulado existencia: Los planos, las rectas y los puntos existen.

En seguida el profesor escribe en el tablero el primer problema para seguir construyendo elementos del sistema teórico local:

Problema 1: *Construir una recta con GeoGebra.*

En la discusión general de la clase dirigida por el profesor para la solución de este, se encontraron: 1. La recta puede ser construida realizando primero dos puntos y luego utilizar la opción recta para que así sea construida. El profesor parte de los pasos de aquella propuesta para escribir el segundo postulado:

Postulado dos puntos-recta: Dados dos puntos, existe una recta m que los contiene.

2. La recta puede ser construida partiendo únicamente de la opción recta. Por la propuesta anteriormente descrita, se elabora el enunciado y parte de la demostración del primer teorema:

Teorema recta-punto: Dada una recta m, existe al menos un punto contenido en ella.

Cabe mencionar que, para la demostración de esta, el profesor tuvo la necesidad de escribir en el tablero el segundo postulado:

Postulado conjunto de puntos: Los planos y las rectas son un conjunto no vacío de puntos.

Se desarrollaron otras opciones para la solución del problema, pero solo fueron contadas por los estudiantes y discutida por el profesor sin incluir algún elemento del sistema teórico. Como faltaba poco tiempo para que se acabara la clase, el profesor presenta el segundo problema para que los estudiantes pudieran responder a la pregunta utilizando GeoGebra sin alguna discusión grupal:

> **Problema 2:** *¿Cuántas rectas pasan por un punto?*

Si bien, los dos primeros problemas se formulan en la primera sesión de clase observada, la puesta en común del Problema 2 se realiza durante la segunda sesión de clase. Así, el profesor inicia la segunda sesión, solicitándole a los estudiantes hacer un recuento del trabajo realizado. Ello lleva a que los estudiantes explicitaran lo que para ellos es un postulado (afirmación que se asume como válida, sin demostrar) y un teorema (afirmación que sí puede ser demostrada). A su vez, que nombraran los elementos que ingresaron al sistema teórico local. El profesor retoma el segundo problema, pidiéndoles que indiquen qué concluyeron respecto a la pregunta: ¿cuántas rectas pasan por un punto? Además, se socializan algunas construcciones. Posteriormente, se construye el enunciado y la prueba del siguiente teorema:

> **Teorema Punto – Rectas:** *Dado un punto A, existen infinitas rectas que lo contienen*.
>
> **Definición interestancia:** *B está entre A y C sí y solo si A, B, C son colineales y AB+BA=AC*

Para culminar la sesión, el profesor formula un problema para seguir en la siguiente sesión de clase:

> **Problema 3:** *Construya una circunferencia en GeoGebra*

Así, en la tercera sesión, el profesor inicia la clase entregándole a cada uno de los estudiantes una hoja con el sistema teórico construido hasta el momento. Luego, se recuerda el problema dejado la sesión pasada, el cuál ayudó a construir la definición de circunferencia:

> **Definición circunferencia:** *Una circunferencia es un conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto C, siendo C el centro de la circunferencia.*

En el que se menciona que la palabra "equidistar" se refiere a que la distancia que hay desde el centro de la circunferencia a cualquier punto que pertenece a la circunferencia es la misma. De tal forma que se construye el siguiente postulado:

> **Postulado radios iguales:** *Si AB y AC son radios de una circunferencia con centro en A, entonces AB=AC*.

Para culminar la sesión, el profesor escribe la definición de punto medio en tablero:

> **Definición punto medio**: *A es punto medio del segmento BC sí y solo si AB=AC, y A está entre B y C.*

Para la tercera sesión, el profesor inicia la clase entregándole a cada uno de los estudiantes una hoja con el sistema teórico construido hasta el momento. Luego, se formula el siguiente problema:

> **Problema 3:** *Dados dos puntos A y M, construir un punto B de tal forma que M sea punto medio del segmento AB.*

En la socialización de ese problema, los estudiantes tuvieron dificultades para formular el enunciado condicional que corresponde a la solución encontrada. Por ello, el profesor hizo énfasis durante la formulación en la relación entre la construcción realizada, el enunciado del problema y la proposición condicional que correspondería a la relación de dependencia encontrada. Posteriormente, construyeron el enunciado y la demostración del siguiente teorema:

> **Teorema punto al lado-punto medio**: Dados dos puntos A y M, existe un único punto B de tal forma que M es punto medio del segmento AB.

3.3. DESCRIPCIÓN DEL AMBIENTE DE CLASE

El ambiente de la clase observada es participativo, pues los estudiantes dan opiniones y proponen situaciones para responder a los problemas que deja el profesor durante cada una de las clases, en ocasiones porque el profesor le pide expresarse y en otras lo realizan espontáneamente. Además, las ideas de los compañeros se complementan unas con otras. Esto hace que las discusiones propuestas por el profesor sean dinámicas y no monótonas.

La interacción de un estudiante con sus compañeros o con el profesor hace pensar que al momento en el que expresa sus ideas, lo hace de un modo dialógico e interactivo. Es dialógico porque se expresa libremente y discute sus planteamientos para luego llegar a un consenso entre el grupo. Es interactiva por que el profesor gestiona la clase procurando que la participación de los estudiantes sea frecuente, respetuosa y amable, siendo él quien en ocasiones asigna el uso de la palabra para saber si los estudiantes están atentos a lo que dicen sus compañeros o él mismo. Sin embargo, cabe mencionar que unos pocos estudiantes no parecen estar cómodos al dar su opinión y que esta sea expuesta a sus compañeros.

Los estudiantes son libres en expresar sus ideas en un lenguaje cotidiano, matemático o utilizando ambas expresiones. Pero es necesario rescatar que, en la mayoría de las ocasiones, se expresan matemáticamente, con las palabras correctas. De no ser así, la oración es interpretada y dicha por otro compañero, profesor o quizás el mismo estudiante, con una oración similar y mejor estructura matemática.

En la clase se observa que el profesor realiza un esfuerzo para que los estudiantes argumenten con sus propias palabras, o con ayuda tanto gestual, como tecnológica[7] para que defiendan su pensamiento, sin ser juzgados.

3.4. RECOLECCIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE DATOS INVESTIGATIVOS

La información que se presenta en el análisis, es recogida por dos cámaras de video el cual graban las clases de geometría de un octavo: una de ellas está enfocada en el tablero y el televisor, mientras que la otra está enfocada exclusivamente en los estudiantes; dos grabadoras de audio ubicadas de tal forma que se escuchara más claro los comentarios de los estudiantes y el profesor en la clase; en ocasiones se tomaron capturas de los apuntes que hacen los estudiantes en su cuaderno; y fotos de las tareas escritas en el tablero por el profesor. Cuando los estudiantes trabajan en grupos, las cámaras exclusivamente son enfocadas en alguno de los grupos conformado por tres o cuatro estudiantes[8] por un momento, luego se rota.

[7] Sobre todo, con la ayuda de la aplicación GeoGebra
[8] Para las transcripciones, solo fue enfocado en un grupo de los grabados.

En la clase se ubicaron dos investigadoras, encargadas de accionar cada uno de los equipos mencionados anteriormente. Una se encargaba en enfocar la cámara de video al profesor y los tableros (digital y físico) y la otra se encargaba de enfocar la cámara de tal forma que estuviera dirigida a los estudiantes, para registrar la interacción en gran grupo. Ocasionalmente, y con el ánimo de lograr mejores registros, alguno de los investigadores observadores hacía preguntas dirigidas a algún estudiante para tratar de que completara alguna idea o repitiera lo ya dicho con el fin de que fuera más entendible al momento de transcribir lo dicho por los estudiantes (porque habla pasito, no se le entiende, no responde a la pregunta…).

Con la intención de optimizar las evidencias para hacerlas más concretas en el análisis, se realizan las transcripciones de las interacciones registradas en los videos y audios recolectados, con cada detalle y gesto que realizaron los estudiantes y el profesor durante el transcurso de las clases, proceso que permitió depurar información. Para ello, se usan convenciones como: el uso de paréntesis redondos para describir la información que no dicen los estudiantes o profesor; el uso de paréntesis angulares o cuadrados para añadir información que el estudiante o el profesor no dice en la oración, pero es importante recalcarlo en la transcripción por el investigador para que la lectura del mismo sea entendible; no terminar la oración en punto cuando otra persona interrumpe al compañero; poner tres puntos al final de la oración cuando la persona habla y no termina la frase sin ser interrumpida; poner entre paréntesis redondos los puntos suspensivos cuando se realizan espacios en silencio o pausas. En el último caso, los puntos suspensivos pueden ser 3, 6 o 9 según el tiempo transcurrido.

Finalmente, luego de varias lecturas de las transcripciones, se seleccionaron intercambios de la conversación sostenida entre el profesor y los estudiantes en donde involucran la tarea de construir un teorema (Mariotti, 1997). Es decir, aquellos en los que se trabajó en torno a la formulación del enunciado y demostración de un teorema, en el marco del sistema teórico que lo respalda.

A continuación, se especifican los fragmentos seleccionados respecto a cada teorema trabajado en las clases observadas y los fragmentos de transcripciones a los cuales pertenecen:

Teorema	Fragmentos	Intervenciones
T. Recta-punto (Anexo A)	a. Enunciado del Teorema recta-punto e introducción a la palabra teorema	[24;26] [33] [82-88]
	b. Validación del Teorema recta-punto con el sistema teórico de referencia	[90-95] [102;103]
	c. Interpretación del antecedente y consecuente	[116-119] [125-131] [139-149]
	d. Formulación del primer argumento de la demostración del Teorema recta-punto	[141;150-153]
	e. Propuestas de demostración para el Teorema recta-punto	[154-157] [170-175] [184-189] [190-192;210]
T. Punto-rectas (Anexo B)	f. Formulación del enunciado del Teorema punto-rectas	[21-28]
	g. Inicio de la prueba del Teorema punto-rectas	[30-38]
T. Punto al lado-punto medio (Anexo C)	h. Inicio de la formulación del enunciado del Teorema punto al lado-punto medio	[13-26] [31-36] [43-45]
	i. Identificación del antecedente y consecuente del Teorema punto al lado-punto medio	[50-52;55-60] [66-78] [85-86;91-97]

Tabla 6. Descripción de fragmentos analizados

3.5. CATEGORÍA DE ANÁLISIS – HERRAMIENTA ANALÍTICA

A continuación, se presentan las categorías de análisis, las cuales corresponden a las acciones que realiza el profesor para promover o desarrollar la construcción de un teorema con el uso de los cuatro componentes del discurso matemático: vocabulario y sintaxis, mediadores visuales, narrativas y rutinas. Las mismas fueron construidas a partir de la propuesta del Grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ que se expuso en el marco teórico, enfatizada cada categoría con acciones específicas para promover o desarrollar cambios en el discurso asociados a la construcción de teoremas. En un principio, las subcategorías fueron registradas por conocimiento propio, sin embargo, cabe resaltar que otras de ellas se fueron registrando mientras se hacía un primer intento de análisis colocando una nueva columna en los fragmentos de las transcripciones para poder colocar al lado la categoría correspondiente; esto ayudó tanto a completar las tablas de la herramienta analítica, como para analizar de manera profunda los fragmentos.

Cada una de las acciones del profesor fueron codificadas de la siguiente forma: La primera letra corresponde al componente del discurso (Vocabulario: V; Mediadores visuales: M; Rutina: R; Narrativa: N); la segunda representa la codificación correspondiente a la acción del profesor respecto a la expresión discursiva de un estudiante (Promover: P; Actuar: A); finalmente, se utilizan dos números, uno referente a la acción propuesta por el Grupo AEG y el otro correspondiente a las acciones particulares para la producción de teoremas. Así, las categorías para el análisis y su respectiva tabla son:

	Acción propuesta por el Grupo AEG para promover o favorecer la voz	**Acciones del profesor tendientes a la producción de un teorema**	**Código**
Acciones para Promover la voz	1. Pide de manera directa usar lenguaje especializado al expresarse	1.1. Pide usar términos institucionalizados en la clase para enunciar el teorema	V-P.1.1
		1.2. Pide utilizar los nombres de los teoremas, definiciones y postulados cuando los utiliza en una demostración.	V-P.1.2
		1.3. Pide utilizar notación y convenciones matemáticas para formular el enunciado del teorema.	V-P.1.3
	2. Indaga sobre el significado de un término especializado incluido en una verbalización.	2.1. Pregunta si está usando bien algún término del enunciado propuesto para el teorema.	V-P.2.1
		2.2. Solicita modificar el vocabulario usado en una demostración	V-P.2.2
		2.3. Pregunta la notación de algún objeto matemático	V-P.2.3
	3. Indaga por el uso que se debe dar a un término especializado en una verbalización. (… en el enunciado o en una demostración propuestas para un teorema).	3.1. Pide explicitar el sujeto de la oración de enunciado del teorema	V-P.3.1
		3.2. Solicita una explicación de la comparación entre dos términos	V-P.3.2
		3.3. Pregunta por el uso del término especializado utilizado al momento de decir el enunciado o alguna parte de la demostración propuesta	V-P.3.3
	4. Indaga por el uso de conectores o	4.1. Solicita expresar el enunciado del teorema de forma condicional	V-P.4.1

	Acción propuesta por el Grupo AEG para promover o favorecer la voz	Acciones del profesor tendientes a la producción de un teorema	Código
	cuantificadores idóneos para expresar con precisión lo que se quiere expresar.	4.2. Solicita explicitar, corregir o evaluar la estructura utilizada por otro compañero	V-P.4.2
Acciones para actuar sobre la voz o con ella	1. Señala uso inadecuado del lenguaje matemático en una verbalización.	1.1. Corrige en el enunciado del teorema el uso dado a un término especializado	V-A.1.1
		1.2. Corrige en el enunciado del teorema el uso de la notación matemática	V-A.1.2
		1.3. Señala la diferencia de la notación y la expresión del enunciado del utilizado	V-A.1.3
		1.4. Corrige el nombre utilizado en una parte de la demostración del teorema	V-A.1.4
	2. Introduce vocabulario y sintaxis especializados.	2.1. Introduce una notación nueva para simplificar la escritura del nombre del teorema o de su enunciado.	V-A.2.1
		2.2. Introduce los formatos para reportar una demostración	V-A.2.2
		2.3. Introduce un término especializado para modificar el enunciado de un teorema o de alguna parte de su cadena deductiva	V-A.2.3
		2.4. Da indicaciones o pautas específicas para asignar el nombre del teorema	V-A.2.4
		2.5. Asigna el nombre a un teorema o utiliza el nombre de los teoremas, definiciones o postulados al momento de la demostración de un teorema en particular.	V-A.2.5
	3. Contrapone el uso que hace del vocabulario y la sintaxis especializados al respectivo uso en verbalizaciones específicas de los estudiantes	3.1. Modifica el uso de términos al momento de describir alguna propiedad encontrada en el objeto u representación gráfica del mismo	V-A.3.1
		3.2. Expresa la escritura correcta de presentar el postulado, la definición o el teorema como parte de la demostración	V-A.3.2
		3.3. Expresa la diferencia de dos o más expresiones parecidas que realicen en cada uno de los enunciados	V-A.3.3
		3.4. Recuerda el uso de notación matemática para escribir el enunciado del teorema o su demostración	V-A.3.4

	Acción propuesta por el Grupo AEG para promover o favorecer la voz	Acciones del profesor tendientes a la producción de un teorema	Código
	4. Destaca el uso que hace de conectores o cuantificadores en sus propias expresiones o en el parafraseo	4.1. Precisa el cuantificador lógico de términos especializados para que lo tengan en cuenta al momento de demostrar un teorema	V-A.4.1
		4.2. Ejemplifica el conector lógico asociado a un postulado, una definición o un teorema	V-A.4.2

Tabla 7 Acciones del profesor para favorecer el uso de vocabulario y sintaxis asociados a la producción de un teorema

	Acción propuesta por el Grupo AEG para promover o favorecer la voz	Acciones del profesor tendientes a la producción de un teorema	Código
Acciones para promover la voz	1. Pide usar mediadores visuales en la exposición discursiva pública	1.1. Pide que utilice una representación para decidir el antecedente o consecuente del enunciado del teorema	M-P.1.1
		1.2. Solicita explicitar una propiedad involucrada en una construcción que es clave en la demostración de un teorema	M-P.1.2
		1.3. Pide utilizar algún mediador visual para aclarar la idea que se tiene de una parte de la cadena deductiva	M-P.1.3
		1.4. Solicita explicar la construcción propuesta, según el paso que se haría en su demostración	M-P.1.4
Acciones para actuar sobre la voz o con ella	1. Usa ostensivamente mediadores visuales en sus explicaciones e ilustraciones o cuando amplifica la expresión del estudiante	1.1. Utiliza una representación para decir el antecedente o consecuente del enunciado del teorema	M-A.1.1
		1.2. Explicita una propiedad involucrada en una construcción que es clave en la demostración de un teorema	M-A.1.2
		1.3. Explica el uso de diagramas para reportar la demostración del teorema	M-A.1.3
	2. Propone el uso de un mediador más eficaz al empleado para apoyar la comunicación de una idea.	2.1. Realiza una representación de la idea que está proponiendo un estudiante al momento de realizar una parte de la demostración del teorema.	M-A.2.1
		2.2. Efectúa una representación gráfica para simbolizar un argumento o una parte del mismo.	M-A.2.2

Tabla 8. Acciones del profesor para favorecer el uso de mediadores visuales asociados a la producción de un teorema

	Acción propuesta por el Grupo AEG para promover o favorecer la voz	Acciones del profesor tendientes a la producción de un teorema	Código
Acciones para promover la voz	1. Pide relatos relacionados con proposiciones, definiciones, lenguaje matemático y procedimientos, que son resultado de exploraciones, recuerdos o sucesos de la clase.	1.1. Pide establecer el estatus epistémico de una proposición en un sistema teórico	N-P.1.1
		1.2. Pide establecer el estatus operativo de una proposición en un argumento	N-P.1.2
		1.3. Pide caracterizar la estructura de una proposición	N-P.1.3
		1.4. Solicita aprobar o no, un argumento de la cadena deductiva para la demostración de un teorema	N-P.1.4
		1.5. Pide opinar sobre el enunciado propuesto para un teorema	N-P.1.5
	2. Pide ampliar, corregir, reelaborar, cambiar la enunciación hecha de una narrativa específica	2.1. Solicita completar un enunciado condicional; incluyendo el antecedente, el consecuente o elementos de estos	N-P.2.1
		2.2. Solicita explicitar un paso de un problema o de una cadena de argumentos	N-P.2.2
		2.3. Solicita la garantía que permite conectar los datos de un argumento con su conclusión	N-P.2.3
		2.4. Solicita objetar un argumento o una cadena de argumentos	N-P.2.4
	3. Pide comparar enunciaciones desde el punto de vista del significado, señalando diferencias y sus consecuencias.	3.1. Solicita comparar dos o más propuestas de enunciados para un teorema	N-P.3.1
		3.2. Solicita comparar dos o más proposiciones utilizadas para demostrar un teorema	N-P.3.2
	4. Objeta abiertamente una narrativa	4.1. Pide opinar sobre los datos, la garantía o la aserción de un argumento que hace parte de una propuesta de demostración	N-P.4.1
		4.2. Pide refutar el argumento de un estudiante.	N-P.4.2
	5. Pide argumentar una narrativa o una acción	5.1. Pide elaborar un argumento con el objetivo de justificar una postura sobre una narrativa	N-P.5.1
		5.2. Pide elaborar un argumento deductivo enmarcado en el sistema teórico del enunciado de un teorema	N-P.5.2
	6. Llama la atención sobre una verbalización o parte de ella	6.1. Solicita opinar acerca de un argumento o una cadena de argumentos	N-P.6.1

	Acción propuesta por el Grupo AEG para promover o favorecer la voz	Acciones del profesor tendientes a la producción de un teorema	Código
Acciones para actuar sobre la voz o con ella	1. Compara enunciaciones desde el punto de vista de significado, señalando las diferencias y consecuencias que producen estas.	1.1. Compara dos o más enunciados condicionales para encontrar el más apropiado	N-A.1.1
		1.2. Compara dos o más argumentos dados por los estudiantes para escoger la más adecuada	N-A.1.2
	2. Ejemplifica o sugiere cómo o cuál debería ser una narrativa apropiada.	2.1. Explicita o complementa el enunciado del teorema	N-A.2.1
		2.2. Explicita el primer o siguiente paso en una cadena de argumentos	N-A.2.2
		2.3. Explicita las afirmaciones que se tienen hasta el momento	N-A.2.3
	3. Modifica la expresión verbal o gráfica de un estudiante	3.1. Completa o modifica el enunciado condicional del teorema	N-A.3.1
	4. Elabora relatos relacionados con proposiciones, definiciones, argumentos, lenguaje matemático y procedimientos, que son resultado de exploraciones, de recuerdos o de sucesos de la clase	4.1. Establece el estatus epistémico de una proposición en un sistema teórico	N-A.4.1
		4.2. Establece el estatus operativo de una proposición en un argumento	N-A.4.2
		4.3. Explicita la estructura condicional del teorema	N-A.4.3
		4.4. Establece el valor de verdad de la hipótesis del enunciado de un teorema en el marco del sistema teórico local	N-A.4.4
	5. Aprueba o resalta la narrativa de un estudiante	5.1. Parafrasea la propuesta de demostración de un estudiante o una parte de ella	N-A.5.1
		5.2. Resalta la narrativa de un estudiante para refutar el antecedente o el consecuente del enunciado	N-A.5.2

Tabla 9 Acciones del profesor para favorecer el uso de narrativas asociados a la producción de un teorema

	Acción propuesta por el Grupo AEG para promover o favorecer la voz	Acciones del profesor tendientes a la producción de un teorema	Código
Acciones para promover la voz	1. Propone situaciones de tarea cuya solución incluye una secuencia común de acciones	1.1. Pide formular un enunciado condicional que correspondiente al resultado de una exploración	R-P.1.1
		1.2. Pide validar (argumentar, demostrar o justificar) el enunciado de un teorema	R-P.1.2
		1.3. Pide entrelazar o relacionar dos o más elementos del sistema teórico para efectuar la demostración del teorema	R-P.1.3
	2. Pide enunciar forma rutinaria de enfrentar algunas tareas.	2.1. Pide ejecutar acciones que concretan una rutina en su proceso relacionado con la producción de teoremas	R-P.2.1
		2.2. Pide enunciar una rutina relacionada con la producción del teorema	R-P.2.2
Acciones para actuar sobre la voz o con ella	1. Hace ostensiva una determinada rutina.	1.1. Identifica el antecedente y el consecuente de una proposición	R-A.1.1
		1.2. Determina cuáles son los posibles elementos del sistema que podrían servir	R-A.1.2
		1.3. Elabora una cadena deductiva para demostrar el teorema, en la cual los elementos del sistema teórico son garantías de pasos de la cadena	R-A.1.3
		1.4. Explicita una norma socio-matemática asociada a una rutina	R-A.1.4
	2. Explicita aspectos de un procedimiento que sirven de control sobre este.	2.1. Hace énfasis en alguna de las acciones que conforman la rutina, como una forma de control respecto a su uso.	R-A.2.1
	3. Sugiere cómo efectuar un procedimiento rutinario.	3.1. Sugiere cómo identificar el antecedente y el consecuente de una proposición.	R-A.3.1
		3.2. Sugiere cómo determinar cuáles son los posibles elementos del sistema que podrían servir para validar.	R-A.3.2
		3.3. Sugiere cómo elaborar una cadena deductiva en la cual los elementos del sistema teórico son garantías de pasos de la cadena.	R-A.3.3

Tabla 10. Acciones del profesor para favorecer rutinas asociados a la producción de un teorema

La herramienta analítica reportada en la Tabla 10 fue utilizada para el análisis de fragmentos de transcripciones de las clases observadas y fue útil para identificar las acciones del profesor de grado octavo para producir cambios en el discurso de los estudiantes respecto a la producción de un teorema. El análisis se reporta en el siguiente capítulo.

Capítulo 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En seguida presento el análisis de los fragmentados seleccionados, en los cuales se evidenciaron acciones del profesor tendientes a la producción de un teorema. En total, seleccioné nueve fragmentos, de los cuales cinco están enmarcados en la producción del Teorema recta-punto; dos son respecto al Teorema punto-rectas; y dos, son relativos al T. punto al lado-punto medio. En el análisis de cada uno de ellos, uso las categorías de análisis para identificar acciones del profesor que se evidencian en sus intervenciones (o en partes de la intervención) y posteriormente, efectúo una descripción en torno al propósito de dichas acciones en la producción de teoremas. Para facilitar la lectura, en este capítulo, reporto la transcripción junto con su respectiva contextualización, el código de la acción asociada al lado de la intervención y en la descripción, y uso colores para diferenciar el rasgo del discurso al cual apunta la acción (naranja: rutinas; azul: narrativas; verde: mediador; morado: vocabulario).

4.1. TEOREMA RECTA – PUNTO

4.1.1. Enunciado del Teorema Recta – Punto e introducción a la palabra “Teorema”

El profesor empieza la primera clase solicitando a los estudiantes enunciar algunas definiciones estudiadas en cursos anteriores. Los estudiantes nombran algunos objetos matemáticos como la recta, la bisectriz, la mediatriz, los ángulos par lineal y los ángulos adyacentes. Posteriormente, el profesor solicita a los estudiantes explicitar si alguna vez han escuchado las palabras “postulado” y “teorema”, lo cual deriva en que Lucas nombraran el Teorema de Pitágoras; de allí surge la siguiente conversación, en el que el profesor establece:

24	Profesor:	(...) Los teoremas son afirmaciones que uno realiza y casi siempre viene [escrito] de la siguiente manera: si algo pasa, entonces yo concluyo algo. Por ejemplo, como decía Lucas del Teorema de Pitágoras y ese tenía que ver con un triángulo rectángulo (...)	R-A.1.4 V-A.4.2
		[…]	
26	Profesor:	Entonces, por ejemplo, si yo tengo un triángulo rectángulo, voy a tener, entonces una relación con sus lados que ahorita no me interesa, pero siempre vamos a tener este tipo de proposiciones. Bien, entonces vamos a arrancar con los postulados, que son las afirmaciones que aceptamos como verdaderas (...)	N-A.4.3 **R-A.1.4**

Posteriormente, el profesor introduce el Postulado de la existencia el cual dice "*los puntos, como las rectas y los planos existen*", dejándolo escrito en el tablero. Luego, pregunta por la notación de algunos objetos geométricos nombrados en aquel postulado:

33	Profesor:	(...) ¿Cómo era la notación de cada uno (rectas y puntos)? Para los puntos ¿qué utilizábamos?	V-P.2.3

En seguida, el profesor propone a los estudiantes realizar el Problema 1, que consiste en construir una recta en GeoGebra. Luego, de que los estudiantes han trabajado en grupo solucionando el problema, el profesor empieza la puesta en común. Para ello, solicita a los estudiantes exponer públicamente las construcciones efectuadas. La primera construcción expuesta es la siguiente: se selecciona la opción recta, luego se da click en una parte del plano en el que aparece un punto fijo, y una recta el cual se mueve en todo el plano según el manejo de la persona que lo esté realizando; finamente, se da click en otra parte del plano.

El profesor enfoca la discusión en aquella solución, dando lugar al enunciado del primer teorema:

82.	Profesor:	(...) ¿Qué podríamos incluir de esas construcciones a nuestro sistema teórico? La primera era ir a la opción recta ¿cierto? Tú [Michael] seleccionaste dos puntos y de una vez apareció ¿cierto? Eso quiere decir que vamos a mirar nuestro primer teorema y es el siguiente ¿Por qué? Porque una vez que usted seleccionó la recta, apareció un punto, volvió a seleccionar en otro lado y apareció otro punto y la recta. Así, ¿por ahora podríamos decir que las rectas cuantos puntos tendrían?	N-P.1.1 M-A.1.1. N-P.2.1
83.	Coro:	Dos.	
84.	Profesor:	¿Cierto? o sea, dos puntos tendrían lo mínimo. Listo, vamos a llevar una notación, cuando hablemos de definiciones, vamos a utilizar la letra D. Cuando hablemos de postulados vamos a utilizar la P. Cuando hablemos de teoremas, la T. **Y nuestro primer teorema se llama recta-punto**. Acuérdenme, ¿cómo era la escritura?	V-A.2.1 **V-A.2.5** **R-P.2.2**
85.	María:	Con la T [de teorema].	
86.	Profesor:	Bueno con la T ¿cierto? Y también, si algo pasa…	**R-A.2.1**
87.	Paola:	Entonces eso [señala el tablero] pasa.	
88.	Profesor:	Listo, muy bien (Escribe el nombre del teorema en el tablero, deja de escribir y mira a los estudiantes). Acuérdense que cuando utilizamos la minúscula, nosotros aludimos al nombre de la recta ¿cierto? […] Entonces si m es una recta, entonces existe un punto en m [escribe el enunciado del teorema en el tablero]. Yo sé que con lo que hemos hecho hasta ahora, en el software, tenemos dos puntos, pero para ello necesitábamos primero un punto, entonces vamos a mirar si eso es cierto o no.	V-A.2.1 N-A.3.1

En el anterior fragmento se identificaron en total catorce acciones del profesor. En diez ocasiones el profesor actuó sobre la voz y en cuatro ocasiones promovió una de las voces.

Respecto a vocabulario, en cinco acciones el profesor se ve interesado por propiciar que en el curso: los estudiantes utilicen notación matemática para referirse a los objetos matemáticos involucrados en el sistema teórico; y, hagan uso adecuado de conectores lógicos asociadas a la estructura condicional de un teorema. Así, en las intervenciones [33;88] durante la escritura del enunciado del Postulado Existencia, el profesor solicita que los estudiantes nombren los puntos y las rectas en correspondencia con un acuerdo al que habían llegado en clases anteriores[V-P.2.3]; luego, teniendo claro que las letras minúsculas se utilizan para nombrar las rectas y las mayúscula para los puntos, el profesor es quien vuelve a decir tal acuerdo del curso para poder escribir en el tablero el enunciado del teorema [V-A.2.1]. Siguiendo con el uso de las convenciones, durante la intervención [84], el profesor introduce las letras D, P y T, para simplificar la escritura de Definición, Postulado y Teorema, respectivamente, al asignarle un nombre a la proposición que ingresa al sistema teórico [V-A.2.1]. Además, dentro de esta misma intervención, el profesor le asigna el nombre de Teorema recta-punto al primer teorema introducido al sistema teórico [V-A.2.5]. Finalmente, en la intervención [24], el profesor, por medio de una proposición que los estudiantes conocen como teorema Pitágoras, ejemplifica la estructura condicional que deben tener el enunciado de cualquier teorema [V-A.4.2].

Respecto a los mediadores visuales, es notable el uso de GeoGebra. Sin embargo, en solo una acción, el profesor actúa sobre la voz de un estudiante con el uso de un mediador visual para que él logre interpretar el antecedente y el consecuente del enunciado del teorema. Específicamente, en la intervención [82], utiliza los pasos específicos de la construcción geométrica que realiza Michael en GeoGebra, en la cual él seleccionó la herramienta recta, hizo clic en la vista gráfica y, al hacerlo, el programa generó simultáneamente una recta y un punto. Así, usa el hecho de que teniendo la recta (herramienta seleccionada) se obtiene un punto en la recta (resultado de utilizar la herramienta), para interpretar que se empieza la construcción con una recta y GeoGebra genera un punto en ella [M-A.1.1]. De allí, se evidencia la intención que tiene el profesor por comparar el orden en el cual se generan los elementos de una construcción con la condicional que corresponde al enunciado del teorema.

Adicionalmente, se evidencian cuatro acciones del profesor cuyo propósito es explicitar o utilizar una rutina. Esta corresponde a una norma socio-matemática según la cual el enunciado de un teorema se debe escribir como una proposición condicional. Allí se identifican dos intervenciones que tiene que ver con: la construcción del enunciado condicional y la construcción del sistema teórico del teorema, y que se relaciona con el estatus epistémico de las proposiciones (postulados, teoremas y definiciones) y la forma cómo se establece su valor de verdad. Así, durante las intervenciones [24,26] el profesor hace ostensiva la rutina [R-A.1.1.4]. En la intervención [24], explica y ejemplifica los elementos que se reportan en el antecedente y en el consecuente de los enunciados de cualquier teorema, indicando que el consecuente de un teorema es una conclusión que el sujeto puede efectuar a partir de una condición inicial; y por último, en la intervención [84], el profesor propone una tarea que implica hacer uso de la rutina explicada, en este caso para formular el enunciado del Teorema recta-punto como una proposición condicional [R-P.2.2]. Además, durante la intervención [86], como al enunciar esta tarea, los estudiantes no recuerdan la rutina, el profesor realiza una sugerencia para que los estudiantes la evoquen y se acuerden de la misma (estructura condicional que debe tener el enunciado del teorema) [R-A.2.1].

Finalmente, se identificaron cuatro acciones del profesor tendientes a favorecer un cambio en narrativas. Estas acciones surgieron para construir el enunciado del teorema, incluir al sistema teórico un nuevo elemento, o ejemplificar el uso de la condicional para reformular narrativas conocidas o enunciadas. En las intervenciones [26, 88], el profesor ejemplifica cómo utilizar la rutina que él estaba explicando; corresponde a una acción tendiente a que los estudiantes reconozcan formas de proceder en la comunidad de referencia al formular el enunciado de un teorema. En la primera intervención, el profesor explicita la estructura condicional de un teorema que es conocido por los estudiantes [N-A.4.3], mientras que, en la segunda intervención, el profesor está explicitando el enunciado del teorema en construcción [N-A.3.1]. Las otras dos acciones se generan en una misma intervención del profesor [82], y tienen como objetivo solicitar al estudiante formular el enunciado condicional que corresponde a un procedimiento de construcción propuesto para representar una recta en GeoGebra. Así, en un primer momento, el profesor con el fin de elaborar el enunciado del teorema, solicita a los estudiantes determinar qué información obtenida de la construcción puede ser ingresada al sistema teórico [N-P1.1]. Dado que los estudiantes habían discutido tres construcciones, el profesor focaliza la atención de los estudiantes en una de ellas, parafraseándola y finalmente, para destacar lo que considera relevante de la construcción, formula una pregunta que contiene el antecedente del enunciado del teorema [N-P.2.1].

4.1.2. Validación del Teorema recta-punto con el Sistema Teórico de referencia

El siguiente fragmento corresponde al momento de la clase en el cual el profesor, con ayuda de los estudiantes, introduce a los estudiantes en la demostración del enunciado del Teorema recta – punto haciendo uso del sistema teórico construido hasta el momento.

Ocurre inmediatamente después de que se ha formulado, y escrito en el tablero, el enunciado del teorema:

90.	Profesor:	[…] Miren, cuando tenemos un teorema, podemos decir algunas cosas que tenemos de nuestro sistema teórico que nos permitan validarlo ¿listo? ¿Qué tenemos hasta ahora de nuestro sistema teórico?	R-A.1.4 R-P.2.1
91.	Paola:	Tenemos un postulado.	
92.	Profesor:	**Un postulado ¿cierto? ¿Cuáles de los postulados? ¿Te acuerdas de los postulados que estábamos ahorita mencionando?**	**R-P.2.1**
93.	Paola:	Existencia.	
94.	Profesor:	Había uno que era de la existencia **¿Qué decía la existencia?**	
95.	Paola:	Existe el punto, la recta y el plano.	

De allí, el profesor empieza a preguntar a los estudiantes por las opciones que habría para empezar la demostración del teorema. De allí surge la siguiente intervención:

102.	Profesor:	[…] yo quiero saber si este teorema (recta – punto) lo podríamos validar con respecto a los dos postulados que tenemos (P. Existencia y P. Conjunto de Puntos). ¿Tú (Mar) qué dices? ¿Cómo podríamos hacerlo?	R-P.1.3 N-P.2.2
103.	Mar.	Entonces hay que demostrar que la recta tiene (…) al menos un punto.	

Durante el fragmento anterior se identificaron tres acciones del profesor referentes a promover el discurso de los estudiantes y una de ellas, para actuar sobre el mismo. De las acciones identificadas, tres están enfocadas en favorecer el uso de una rutina en la clase y otra, en favorecer una narrativa. Respecto a la producción del teorema, las acciones apuntaron a la formulación de la demostración del teorema y a la relación de este con el sistema teórico que se ha construido en el curso.

Para el caso de las rutinas, se evidencian tres acciones del profesor cuyo propósito es que el estudiante reconozca una rutina: el sistema teórico debe ser utilizado para poder demostrar el enunciado del teorema. Así, el profesor inicia el intercambio [90] explicitando lo que se va a entender por validar un teorema, el cual lo explicita con la expresión: "decir algunas cosas" del enunciado con respecto al sistema teórico que se tiene de referencia [R-A.1.4]. De allí, empieza a surgir la idea de interpretar un Teorema como un enunciado que puede ser demostrable a partir de un conjunto de enunciados que hacen parte del sistema teórico. Posteriormente, en las intervenciones [90; 92; 94], el profesor propone una primera acción relacionada con la rutina, que consiste en enunciar los elementos que hacen parte del sistema teórico [R-P.2.1]. Finalmente, en la intervención [102], luego de haber comunicado a los estudiantes qué es un teorema en matemáticas, y ligándolo al teorema particular que se está discutiendo, teorema recta-punto, el profesor ejemplifica una parte de lo que el profesor pretende que se vuelva una rutina en la clase, el cual fue anteriormente nombrada y les pide a los estudiantes que relacionen el enunciado del teorema con el postulado existencia y conjunto de puntos, como un insumo para la elaboración de la demostración. Específicamente, se centra en promover que los estudiantes identifiquen el elemento del sistema teórico que es útil para deducir el consecuente del enunciado del teorema a partir de su antecedente [R-P.1.3].

Ahora, para el caso de la narrativa encontrada, que surge en la última intervención [102], el profesor con el propósito de empezar a desarrollar la demostración del teorema pide a María del Mar, elaborar el primer argumento de la demostración del Teorema recta-punto [N-P.2.2].

4.1.3. Primera propuesta de demostración del T. recta - punto

Después de que en el curso formularon el enunciado del T. recta punto, haya sido institucionalizado por el profesor, además de que explicara qué significaba validar un teorema, él ha involucrado a los estudiantes en la tarea de validar el teorema. De allí surge la siguiente propuesta:

116.	Mar:	Construir un punto en la recta […]	
117.	Paola:	Por el Teorema.	
118.	Mar:	Se puede concluir (risas) que es un conjunto de puntos. No sé.	
119.	Profesor:	Bueno, pero quisiera que ustedes hablen y logren de pronto debatir y mirar si están de acuerdo con la idea que su compañera dijo ¿sí? Porque a ver, les voy a decir lo que yo le entiendo a María de Mar (…) Tú me debes decir si es cierto o no ¿listo? Me dices que existe un punto y de ahí sale una recta ¿ustedes qué dirían?	N-A.5.1 N -P.6.1
		[…]	
125.	Profesor:	Bueno, qué dirían ustedes, (…) O sea, yo parto de un punto, ¿para todos es cierto que partimos de un punto?	**N-P.1.2**
126.	Varios:	Sí.	
		[…]	
128.	Paola:	Pero acá dice que hay una recta, que pasa por ese punto. O sea, yo tengo la recta y de esa recta aparece el punto.	
129.	Profesor:	Bueno, pero ya es diferente de lo que dijeron. Entonces quiero que me digan, porque hay dos posturas: Una que parte del punto y otra que partimos de la recta. ¿Quiénes están en contra? ¿Y a favor? De dónde partimos, ¿del punto o de la recta?. ¿Qué diría Daniela? ¿Cuál tu dirías? ¿Que se parte	N-P.3.2

		del punto, o de la recta?	
130.	Daniela:	Pues como vimos ahí, se puede empezar desde la recta o desde el punto.	
131.	Profesor:	Sí, pero les voy a leer el teorema para que digan algo con respeto a los dos postulados. Dije: Si m es una recta, entonces existe un punto en m. ¿Cierto? Y estábamos discutiendo si partíamos de la recta o el punto.	R-A.3.1
		[…]	
139.	Profesor:	Porque es que yo llegué y dije miren: Si m es una recta, no dije si m es un punto. Entonces ¿de dónde partimos?	R-A.3.1
140.	Coro:	De la recta.	
		[…]	
147.	Profesor:	Ah. Es que los teoremas tienen algo en particular, resulta que después de que usted pone acá el sí (señalando el antecedente del teorema), es el objeto que tiene. Acá dice, si m es una recta, entonces tengo mi recta. ¿Qué necesito garantizar, para que en esa recta por lo menos hallan cuantos puntos?	R-A.1.4 N-P.2.2
148.	Varios:	Uno.	
149.	Profesor:	Uno, ¿cierto? […]	

Durante el fragmento anterior se identificaron ocho acciones del profesor: cuatro de ellas para promover la expresión discursiva de los estudiantes y otras cuatro para actuar sobre ellas. De las acciones evidenciadas, tres acciones están enfocadas en rutinas y cinco, en narrativas.

Con respecto a las acciones enfocadas en rutinas para desarrollar la demostración del teorema, el profesor enfatiza la conversación en que los estudiantes interpreten que, para iniciar la demostración de algún teorema, se debe tener en cuenta que el antecedente del enunciado se debe tomar como válido. Así, en las intervenciones [131; 141], el profesor, por medio de la lectura del enunciado del teorema recta-punto, intenta hacerles comprender a los estudiantes que, para desarrollar la demostración, se debe asumir que la recta está dada como válida, y justificar que hay un punto en ella, identificando allí el antecedente de la proposición o enunciado del teorema [R-A.3.1]. Además, en la intervención [147], el profesor es quien hace ostensiva la rutina mencionada, al decir que los teoremas tienen una propiedad en particular y es que los objetos que mencionan en el antecedente del teorema, en este caso la recta, es lo que se toma como válido en el inicio de la demostración del teorema [R-A.1.4].

Se identifican también cinco acciones del profesor tendientes a favorecer un cambio en las narrativas. Estas apuntan a que los estudiantes, además de identificar el antecedente del enunciado, lo asuman como el dato del primer argumento de la demostración del teorema. Así, en la intervención [119] se evidencian dos acciones; por una parte, el profesor parafrasea la propuesta de María del Mar, la cual interpreta como una sugerencia para empezar la demostración con el punto y concluir que a partir del punto se puede obtener una recta que lo contiene [N-A.5.1], luego el profesor pregunta si están de acuerdo con la propuesta reconstruida por el profesor [N-P.6.1]. Después de haber concluido que en realidad se parte del punto, en la intervención [125], el profesor cuestiona si algún estudiante tiene duda o está de acuerdo con el resultado [N-P.1.2]. Luego, en la intervención [129] solicita comparar dos proposiciones utilizadas para iniciar la demostración del teorema recta-punto; por una parte, los estudiantes que dicen que el punto se tiene como dado para poder llegar a la recta y otros que dicen que la recta se tiene como dada para llegar al punto [N-P.3.2]. Durante la intervención [147] luego de explicitar la rutina, teniendo en claro que se tiene la recta, solicita explicitar el siguiente paso de la cadena de argumentos para demostrar que por lo menos existe un punto en la recta dada [N-P.2.2].

4.1.4. Validación del antecedente del enunciado del Teorema recta-punto

Una vez se ha acordado que en una demostración se asume como válido el antecedente del teorema, el profesor pide a los estudiantes proponer la demostración con la ayuda del sistema teórico. De allí surge la siguiente conversación:

141.	Profesor:	[…] Listo, cuáles (postulados) podríamos utilizar y por qué. Todos vamos a escuchar y vamos a decir si sí o si no. Dale.	N-P.5.2
		[…]	
150.	Paola:	El de existencia, porque dice que el punto y la recta existen.	
151.	Profesor:	¡Ah bueno! Qué dicen ustedes. ¿Si podríamos arrancar por el postulado de la existencia? Entonces decimos, bueno: ¿existe la recta m? sí, ¿por qué? Porque tenemos un postulado donde dice que existen las rectas, ¿qué más existe?	N-P.4.1 N-A.2.2 N-P.2.2
152.	Paola:	Puntos y planos.	
153.	Profesor:	Listo, entonces ya tenemos que existe la recta, bien. Garantizamos la existencia de esta recta (recta m), entonces vamos a escribir que por el postulado ¿cómo era que lo llamábamos? ¿Existencia cierto? Existencia, existe la recta m (escribe en una esquina del tablero, debajo de donde se puso el enunciado del teorema “por P. Existencia, existe la recta m”)	N-A.2.2

En el fragmento anterior se encuentran cinco acciones del profesor; tres de ellas son para promover el discurso y las otras, para actuar sobre la propuesta de un estudiante. Las cinco están relacionadas con narrativas. En este fragmento, los estudiantes insisten en validar la existencia de la recta, a pesar de que el profesor había indicado que el antecedente del enunciado de un teorema se asumiría como válido. Esto lleva a que el profesor acepte la propuesta de Paola se utilizar el P. Existencia para garantizar la existencia de los objetos reportados en el antecedente. Así, en la intervención [153] el profesor en primera instancia pide indagar por los elementos que se tienen hasta el momento en el sistema teórico para argumentar la primera afirmación hecha [N-P.5.2]. Luego de que Paola sugiriera el postulado existencia, en la intervención [159] se encontraron tres acciones. En primera instancia, el profesor pide opinar si están de acuerdo o no con la garantía propuesta por Paola [N-P.4.1]; luego de ello, explicita que efectivamente se debe utilizar tal postulado para garantizar que la recta existe [N-A.2.2]. Y, finalmente termina su dialogo preguntando por los demás objetos matemáticos descritos en el postulado existencia [N-P.2.2]. Para la intervención [161], hace explicita la garantía usada por Paola para soportar la existencia de la recta [N-A.2.2].

4.1.5. Segunda propuesta para la demostración del teorema

Después de haber propuesto el primer paso de la demostración, el profesor gestiona la clase para conocer los siguientes argumentos y llegar a los demás pasos de la demostración de la siguiente forma:

154.	Profesor:	Listo, y ¿qué más?, ya tenemos la existencia de la recta, ahora ¿qué tendría yo que garantizar? (… … …) [Los estudiantes están anotando en los cuadernos] ¿Qué necesito yo?	N-P.2.2
155.	Paola:	El punto.	
156.	Profesor:	El punto, entonces cómo podría garantizar que hay un punto ahí. Vamos a mirar cómo lo hicieron ¿listo? A ver (…)	N-P.2.3
157.	Laura:	Postulado conjuntos de puntos.	
		[…]	
170.	Profesor:	[…] ¿Tú qué dirías? ¿Sí podemos usar ese postulado o no?	N-P.4.1
171.	David:	¡Claro!	
172.	Profesor:	¿Por qué?	N-P.5.1
		[…]	
174.	Paola:	Se podría decir que, o sea, poner el punto, porque el postulado conjunto de puntos dice que la recta es un conjunto de puntos.	
		[…]	
184.	Profesor:	¿Qué dicen ustedes?	N-P.4.1
185.	Paola:	El postulado dice que la recta está compuesta por muchos puntos, quiere decir que el punto está en la recta. No necesitamos ponerla fuera de la recta, porque por el postulado ya se sabe que está en la recta.	
186.	Daniela:	Solo faltaría escoger un punto sobre la recta.	
187.	Profesor:	Pero yo no veo a muchos tan convencidos, por ejemplo, a María José no la veo tan convencida. Ustedes qué dicen, sí o no.	N-P.4.1

188.	Varios:	Sí.	
189.	Profesor:	O cuál de las dos, porque son dos posturas diferentes. O de pronto sale una nueva, ¿Diego qué opina? (…) ¿Sí podríamos usar el postulado? […]	N-P.3.2
		[…]	
191.	Profesor:	Miren, acá hay una idea (…) La idea de Paola es que usemos el postulado de existencia porque el postulado nos garantiza que la recta es un conjunto de puntos, eso nos garantiza que por lo menos debe haber uno. Y la idea de Sofía es, no, no lo podemos usar, lo que debemos hacer es que haya un punto, vamos a ver si la entendí, o si no tú me dices ¿listo? Que hay un punto externo y que ese punto externo	N-A.5.1
192.	Sofía:	No.	
193.	Profesor:	Bueno, en todo caso, me parece que hay una postura y hay que mirar por qué lado irnos y saber si aparece otra […]	N-P.3.2
		[…]	
210.	Profesor:	[…] Bueno, vamos entonces por ahora a dejar ahí la discusión para poder avanzar un poco. Cada uno de ustedes ahorita me va a decir por qué idea se quieren ir, por la idea que tiene Paola o Sofía.	

En el fragmento anterior se evidenciaron nueve acciones del profesor referentes únicamente a narrativas. En ocho ocasiones para promover una de las expresiones discursivas de los estudiantes y una vez para actuar sobre ellas. Con estas acciones, el profesor tiene la intención de formular la demostración del Teorema recta-punto con la ayuda de las ideas de los estudiantes. No obstante, al finalizar la sesión no se llega a un acuerdo mutuo al final del fragmento.

El profesor inicia su intervención [154; 156] recordando que ya existe la recta por el P. Existencia y pregunta por el consecuente o a lo que habría que concluir en la demostración [N-P.2.2]; luego, pregunta por cuál podría ser el siguiente paso para garantizar que el punto está efectivamente en la recta [N-P.2.3]. Después de escuchar el argumento propuesto por Laura y Paola, el cual consiste en utilizar el postulado conjunto para soportar la existencia del punto en la recta, el profesor [170; 184;187] pide opinar sobre la garantía y aserción que de ese argumento, para así culminar con la demostración [N-P.4.1]; además en [172] pide elaborar un argumento para saber el por qué están de acuerdo con la garantía propuesta por Laura [N-P.5.1]. Para ir culminando, en las intervenciones [189; 193] el profesor solicita comparar los dos argumentos utilizados por dos estudiantes distintas; una en la cual dice que, al utilizar el postulado conjunto de puntos, se garantiza la existencia de tal punto en la recta y otra la cual enfatiza que antes de utilizar el postulado mencionado, se debe colocar un punto fuera de la recta, pero al utilizarlo, ese punto debe estar necesariamente en la recta [N-P.3.2]. Cabe mencionar que la última idea no fue tan bien comprendida tanto por los estudiantes como por el mismo profesor. Así, en la intervención [191] el profesor intenta parafrasear cada una de las propuestas de demostración hechas por las dos estudiantes [N-A.5.1]. Finalmente, no se llega a un mutuo acuerdo de la conclusión para poder realizar la justificación del teorema de manera conjunta; se deja abierta la idea de que se realiza por medio del conjunto postulado de puntos, pero no se realiza explícitamente en el tablero.

4.2. TEOREMA PUNTO-RECTAS

4.2.1. Formulación del enunciado del teorema punto-rectas

El profesor parte de respuestas lacónicas dadas anteriormente por los estudiantes a la pregunta ¿Cuántas rectas pasan por un punto? Estas respuestas fueron “infinitas”, “varias” y “muchas”. En este fragmento, el profesor busca promover la construcción del enunciado condicional que corresponde a las respuestas dadas:

21.	Profesor:	Bueno, ya volviendo al tema, aparecen ahora sí varias, muchas rectas. Pero ¿qué será? ¿Podríamos escribirlo como un postulado o un teorema y ¿por qué? ¿Qué nos diría por allá Nicolás? Cuéntanos, porque si es teorema, tendríamos que escribirlo como una afirmación que tiene ¿qué forma?	R-A.2.1
22.	Nicolás:	Sería, si A es un punto, entonces existen infinitas rectas m.	
23.	Profesor:	[Escribe en el tablero lo que dice Nicolás] ¿No falta algo?	N-P.2.1
24.	Laura	Que los contienen	
		[…]	
27.	Profesor:	Sería: Si A es un punto, entonces existe infinitas rectas m que lo contiene. Y ¿dices que es teorema o postulado?	N-A.2.1
28.	Nicolás:	Teorema.	

En este fragmento se evidenciaron que durante dos ocasiones se encontraron acciones con las cuales el profesor actúa sobre las afirmaciones realizadas por los estudiantes y en una ocasión, él realiza acciones para que los estudiantes expresen sus ideas.

Las intervenciones realizadas por el profesor durante este episodio tienen como intención que los estudiantes deduzcan el enunciado del teorema y aparte que comprendan que este enunciado es demostrable. Así, en un primer momento [21] el profesor antes de preguntar por el enunciado en sí vuelve a preguntar por el formato condicional que debe tener el enunciado del teorema [R-A.2.1].

Luego de que un estudiante diera una primera opinión del cómo quedaría el enunciado del teorema, el profesor en la intervención [23] le pide a los estudiantes de manera implícita que complementen el enunciado que sugiere el compañero, pues le hace falta una parte importante de este [N-P.2.1] y finalmente, para institucionalizar el enunciado del teorema, en la intervención [27], el profesor explicita tal enunciado con las ideas que habían dado los estudiantes anteriormente, aunque con algunas pequeñas modificaciones [N-A.2.1].

4.2.2. Inicio de la prueba del Teorema punto-rectas

Después de que se ha construido el enunciado del Teorema Punto – rectas, surge el siguiente intercambio:

30.	Profesor:	Si dices que es teorema, ¿se puede decir algo de él con respecto a los postulados y teoremas que vimos anteriormente? ¿Cómo podríamos iniciar? María del Mar, ¿qué se te ocurre?	R-P.1.3 N-P.2.2
31.	Mar:	Postulado existencia para decir que el punto y la recta existen. […]	
33.	Mar:	Hay que empezar por el postulado existencia para poder decir que el punto y la recta existen.	
34.	Profesor:	¿Todos de acuerdo con esa [idea]? ¿Necesitamos primero hablar de ese postulado de existencia? ¿Qué dice Julián?	N-P.4.1
35.	Julián:	De pronto sí.	
36.	Profesor:	Pero acá (enunciado del teorema) me dice “si A es un punto” [lo lee del tablero]. Ahí está dado A ¿cierto? De que existe A, ya está. O sea, no necesariamente tendría que irme al postulado de la existencia para garantizar que existe A, ¿cierto? A ya está, pero **¿qué necesitaría para garantizar las infinitas rectas que ustedes dicen que existen? ¿Qué necesitaría Michel?**	N-A.4.4 **N-P.5.2**
37.	Michel	Garantizar que existen infinitas rectas.	
38.	Profesor:	[…] Por ahora tenemos el punto A ¿no? ¿Qué más podríamos garantizar? **¿Qué necesitamos para que haya otra recta?**	**N-P.2.2**

En el fragmento anterior se encuentran en total seis acciones del profesor el cual en cuatro de ellas promueve la voz, mientras que en tres de ellas actúa sobre una voz en especial.

Respecto a narrativas, se evidencian cinco acciones cuyos propósitos son que los estudiantes hagan uso de dos rutinas que el profesor ha explicitado desde la clase anterior: en la demostración de un teorema se asume como válido el antecedente del teorema y la demostración de un teorema se realiza usando elementos del sistema. Así, en la intervención [30], pregunta cómo se puede iniciar la demostración del enunciado del teorema a la luz de los elementos del sistema teórico [N-P.2.2]. Posteriormente, el profesor en la intervención [34] cuestiona la idea propuesta por María del Mar de utilizar el postulado existencia para garantizar que el punto existe [N-P.4.1] y además, en la intervención [36], siguiendo con la idea, por una parte establece la existencia de los objetos nombrados en la hipótesis del enunciado [N-A.4.4] y vuelve a preguntar por la garantía a seguir para que las infinitas o por lo menos una de las rectas nombradas en el enunciado del teorema, exista [N-P.5.2]. Finalmente, en la intervención [38], el profesor solicita explicitar el siguiente paso de la cadena deductiva para garantizar la existencia de mínimo una recta que pase por el punto A [N-P.2.2].

Además, se evidencia una acción tendiente a promover la apropiación de una rutina. Específicamente, él vuelve a recordar que cuando se tiene un teorema, este puede ser demostrado con base en los postulados, definiciones o teoremas institucionalizados en la clase anteriormente. Así, en la intervención [30] el profesor pregunta si es posible “decir algo” del teorema con respecto a postulados y teoremas vistos anteriormente [R-P.1.3].

4.3. TEOREMA PUNTO AL LADO - PUNTO MEDIO

4.3.1. Formulación del enunciado del T. punto al lado – punto medio

El profesor inicia última sesión de clase observada, solicitándole a los estudiantes comunicar a los miembros de la clase, la solución que propusieron al problema 3. Además, hace entrega a cada uno de los estudiantes una hoja con los elementos del sistema teórico que se tiene hasta el momento:

13.	Profesor:	Listo, ¿quién lo pudo hacer? Lucas, ¿nos quieres decir cómo se hace? Porque no alcanzamos a discutirlo acá, ¿cierto? Entonces acá Lucas lo va a hacer (en Geogebra). Presten atención ustedes allá, porque vamos a hacer una actividad con respecto a lo que estamos viendo	M-P.1.1
14.	Lucas:	No profe.	
15.	Profesor:	¿Nada? Listo, dale tú (señala a Paula) o tú (Señala a Mariana). Cualquiera de las dos.	
16.	Lucas:	(Le pasa la tablet a Paula)	
17.	Profesor:	Bueno cuéntanos, ¿qué vas a hacer?	
18.	Paula:	Una circunferencia.	
19.	Profesor:	Pero hay un problema, porque de dónde se parte.	M-P.1.1
20.	Algunos	De un punto.	
21.	Profesor:	¿De un punto? O de cuántos	M-P.2.2

[…]

24.	Otros	De dos.	
25.	Profesor:	De dos puntos, ¿cierto? Entonces no puedo hacer una circunferencia, primero se crean los dos puntos.	N-A.4.4 M-A.1.2
26.	Paula	(Crea los dos puntos en GeoGebra)	

[…]

32.	Paula.	Ahora si puedo trazar la circunferencia	
33.	Profesor:	Bueno, voy preguntando, por qué vas a hacer una circunferencia, o por qué creen los demás que vamos a hacer una circunferencia y ¿por qué no hacer otra cosa?	M-P.1.4
34.	Sofía	Profe, pero M tiene que ser punto medio.	
35.	Profesor:	Ahhh ¿Y entonces?	
36.	Paula:	O sea, el centro es M	

[…]

Después de pulir algunos detalles de la construcción y los nombres de los puntos en la misma, el profesor pregunta si es necesario construir la recta que nombraron a lo que responden:

43.	Paula:	La recta es para que cuando mueva el punto $\boldsymbol{A}$, no se cambie el punto $\boldsymbol{M}$, que no cambie, que no deje de ser el punto medio.	
44.	Profesor:	Qué dice María José, está de acuerdo o no (…) y tampoco me han dado respuesta, quiero que tú lo hagas, del por qué utilizar circunferencia, para qué son útiles las circunferencias.	M-P.1.3 N-P.5.1
45.	María Jose:	Para encontrar las mismas distancias	

El fragmento anterior está compuesto por nueve acciones del profesor; en seis ocasiones el profesor promueve que los estudiantes expresen sus ideas y en las otras tres, el profesor actúa sobre las afirmaciones o preguntas que formulan los estudiantes.

Respecto a las siete acciones del profesor en las cuales promueve el uso o desarrollo de mediadores visuales, las mismas están enfocadas en que la forma cómo se efectúa una construcción en Geogebra, se convierta en un referente para que los estudiantes establezcan la relación de dependencia que reportará el enunciado del teorema que se va a formular. Así, en las intervenciones [17;19], el profesor le da la Tablet a Paola para que empiece a realizar la construcción con lo dado del problema, el cual se comportaría como el antecedente del enunciado [M-P.1.1]. En la intervención [19], el profesor intenta que la estudiante se dé cuenta el error que comete al construir una circunferencia ya que de ese objeto no se partía en el problema trabajado. En la intervención [21], solicita explicitar de cuántos puntos se parte el problema [M-P.2.2]. Finalmente, durante la intervención [33], el profesor solicita explicar el por qué es necesaria la circunferencia para encontrar el punto de tal forma que cumpla con la condición pedida [M-P.1.4].

En cuanto a las acciones de narrativas, se enfocan en comprender que las construcciones propuestas deben tener un peso para que sean necesarias al momento de que sean utilizadas. Así, en la intervención [25], el profesor es quien establece el valor de verdad de la hipótesis, en este caso los dos puntos iniciales [N-A.4.4]. Finalmente, en la intervención [44], pide elaborar un argumento el cual justifique la utilidad de las circunferencias en el problema [N-P.5.1].

4.3.2. Identificación del antecedente y consecuente del Teorema punto al lado – punto medio

Luego de haber hecho la respectiva construcción, el profesor les dice que lo acabado de construir puede ser demostrado, en el que surge la conversación a continuación:

50.	Profesor:	Bien, Juan Pablo, vamos a intentar escribir lo que acabamos de hacer como un teorema [...]	R-P.1.1
51.	Laura	Si esto, entonces…	
52.	Profesor:	Entonces, Juan Pablo… La primera, si …	
		[…]	
55.	Juan Pablo:	Si B está en la circunferencia, entonces A y M_1 están conectadas (mira el cuaderno). No, si B está en la circunferencia en el centro de M_1, entonces A y B están conectados entre un orden.	
56.	Profesor:	A ver, qué dice Sergio, de acuerdo o no de acuerdo.	N-P.1.5
57.	Sergio	No, porque no es el punto B.	
58.	Profesor:	Ahhh no podríamos hablar del punto B todavía, Pero entonces ¿por dónde arranco acá? Si ¿qué?	N-A.5.2 R-P.1.1
59.	Sergio:	Si hay un punto M	
60.	Profesor:	Bueno, qué dicen los demás, porque de eso partió, ¿cierto? Paula empezó a colocar dos puntos, entonces vamos a colocar si A y M puntos (escribe en el tablero).	M-A.1.1

Luego de que el profesor le resuelve la duda a Sergio de que en realidad se empieza el enunciado nombrando los dos puntos y no solo uno, sigue con el discurso de la siguiente forma:

66.	Profesor:	Si hay dos puntos	
67.	María Sofía	Existe una recta.	
68.	Camila	Ajá.	
69.	Profesor:	Bueno, pero miren lo que queremos hacer nosotros, miren el problema. Hay dos puntos, ahí los nombrábamos (…) María José (…) Dana (…) ¿Qué quería yo hacer? ¿Encontrar quién?	R-P.1.1
70.	Camila:	M	
71.	Profesor:	¿Encontrar M? no	
72.	Luisa	No, encontrar B	
73.	Profesor:	Encontrar B, tal que ¿qué?	

74.	Luisa:	Para que M sea el punto medio de A y B	
75.	Profesor:	Ahh bueno, esa es la información que yo necesito colocar acá [en el tablero]. Entonces, tú me dices Si hay M punto, podríamos entonces, por acá, tenías una idea, ¿cierto? (Señalando a Luisa)	R-A.3.1
76.	Luisa:	Si hay dos puntos	
77.	Profesor.	Si hay dos puntos, ¿cierto? Pero ya los tenemos (… silencio). Entonces si hay dos puntos. ¿Cómo se llamaban los puntos?	V-P.1.3
78.	Varios:	A y M	

Luego, para encontrar el consecuente del enunciado del teorema, los estudiantes sugieren que se encuentre una recta o un segmento que contenga esos puntos a lo que surge la siguiente conversación:

85.	Profesor:	[…] Es que, aunque haya una recta, en realidad lo estaba preguntando por el punto medio del segmento, ¿cierto? Que M sea el punto medio, es decir, si A y M son puntos, entonces existe (mientras copia en el tablero). Existe ¿quién? ¿la recta? ¿Queríamos encontrar una recta? O ¿qué queríamos encontrar?	N-A.2.1 N-P.2.1
86.	Varios:	Otro punto, un segmento, la recta	
		[…]	
91.	Profesor:	Otro punto. ¿Qué punto? ¿Cómo lo queríamos llamar nosotros?	
92.	Paula:	B	
93.	Profesor:	[Copia en el tablero] Existe B punto tal que ¿qué? M es el punto medio ¿de quién?	N-A.2.3
94.	Paula y Sofia:	De AB	
95.	Profesor:	¿De la recta AB o del segmento?	N-P.3.1
96.	Paula:	Del segmento AB	
97.	Profesor:	Del segmento. Pilas que las rectas no tienen puntos medios, aunque ahí nos faltó hacer el segmento o quitar la recta (en la construcción). Entonces, (Mientras lee en el tablero) tal que M es punto medio del segmento (copia) AB. Si señores, así quedaría bien.	N-A.2.1

El fragmento consta de trece acciones que el profesor realiza durante ese momento. Nueve de tales acciones el profesor actúa sobre la voz y en las otras seis el profesor promueve una de las voces.

Durante el transcurso del fragmento se encuentra una acción respecto a mediadores visuales. Allí, el profesor enfatiza en relacionar la solución del problema, realizada en GeoGebra, con el antecedente del enunciado. Por tanto, en la intervención [60], el profesor enfatiza que los dos puntos construidos inicialmente por Paula en GeoGebra, estos deben ser entonces nombrados durante el inicio del enunciado, para poder construir su antecedente [M-A.1.1]. Evidenciando nuevamente que el profesor tiene como intención en comparar el orden en el cual se generan los elementos de una construcción para así elaborar el antecedente.

Respecto a vocabulario también se evidencia una acción del profesor referente a este, en el cual el profesor se interesa en recordarle a los estudiantes que hay que hacer uso de los objetos matemáticos nombrados en algún momento para completar el enunciado del teorema. Como lo muestra en la intervención [77], el profesor le pregunta específicamente los nombres de los puntos que se utilizaron en el problema y en la construcción de la solución en GeoGebra para poder escribir el enunciado del teorema punto al lado-punto medio [V-P.1.3].

También se muestran cuatro acciones del profesor involucrando alguna rutina. Allí el profesor tiene como propósito que los estudiantes escriban de forma condicional la solución del problema con ayuda de la geometría dinámica, puesto que este se convertiría en un teorema. Así, el profesor inicia la conversación [50] para elaborar el enunciado, afirmando que la construcción hecha anteriormente puede escribirse de forma condicional y además a ello, corrobora que aquello corresponde a un teorema [R-P.1.1]. Durante las intervenciones [58,69], el profesor teniendo como propósito que los estudiantes formularan el enunciado correspondiente al resultado de la exploración y solución del problema: por una parte, en la intervención [58] luego de que un estudiante diera una primera idea del enunciado del teorema, y que un estudiante la hubiera refutado, el profesor pregunta específicamente por el antecedente y los objetos matemáticos que estarían presentes allí; además en la intervención [69], el profesor retoma tanto el problema, su solución y el antecedente elaborado por los estudiantes escrito en el tablero, para que los estudiantes dijeran el consecuente del mismo relacionando aquellos objetos obtenidos finalmente [R-P.1.1]. Para culminar con las rutinas, en la intervención [75], el profesor con el propósito de que los estudiantes elaboraran el antecedente del enunciado del teorema con la ayuda de las ideas sueltas que dieron los compañeros anteriormente, les dice que esas ideas son las que se deben mencionar de la forma condicional para poder ser escrita en el tablero, de alguna forma para que sea institucionalizada una parte del enunciado [R-A.3.1].

En cuanto a las narrativas identificadas, se encontraron siete acciones del profesor correspondiente a ellas cuya intención fue por una parte que los estudiantes mismos elaboren el enunciado del teorema a partir de pequeñas mediaciones del profesor y por otra parte que comprendieran el cómo identificar el antecedente y el consecuente por medio de los objetos matemáticos elaborados en GeoGebra para la solución del problema. Así, en la intervención [56] el profesor comienza por preguntar si están de acuerdo o no con la primera idea de enunciado “completo” del teorema elaborado por un estudiante [N-P.1.5]. Dado que un compañero refuta la respuesta de un estudiante en cuanto a la propuesta del antecedente, el profesor resalta lo dicho por el compañero diciendo que por el momento no se puede nombrar el punto B como objeto dado en el antecedente del enunciado [N-A.5.2]. Luego de algunas ideas sueltas, se evidencian las demás narrativas consecutivas dichas por el profesor; en primera instancia, en la intervención [85], el profesor hace que los estudiantes se centren en el punto medio del segmento para poder llegar al consecuente del teorema a pesar de los demás objetos matemáticos, como la recta, realizados durante la construcción del punto B [N-A.2.1], y luego, pregunta nuevamente por el objeto matemático que debe ser nombrado en el consecuente, y que fue la última construcción realizada en GeoGebra, en este caso el punto B [N-P.2.1]. Después, en la intervención [93], el profesor explicita las afirmaciones del enunciado que se tiene hasta el momento, mientras lo va escribiendo en el tablero, faltando una pequeña parte de este [N-A.2.3] para así, en la intervención [95] preguntar por el objeto matemático adecuado para nombrar el punto medio y poder así culminar con el enunciado del teorema [N-P.3.1]. Finalmente, en la intervención [97] el profesor culmina el enunciado del teorema escribiendo en el tablero lo que faltaba, y enunciándolo completamente en el salón [N-A.2.1].

4.4. SÍNTESIS DE RESULTADOS

A continuación, se presenta la Tabla 11 que resume los resultados obtenidos, clasificando las acciones del profesor identificadas, en correspondencia con el elemento del teorema que se buscó promover (el enunciado, la demostración o el sistema teórico). Adicionalmente, estas acciones se categorizaron en relación con el fragmento en el cual surgieron y con el propósito respecto a la expresión discursiva del estudiante.

	Enunciado		Sistema Teórico		Demostración

Fragmentos de episodios	Rasgo del discurso al actuar				Rasgo del discurso al promover			
	V	MV	N	R	V	MV	N	R
a. Enunciando del Teorema recta-punto e introducción a la palabra teorema				1.4				
	4.2							
			4.3					
				1.4				
					2.3			
							1.1	
		1.1						
							2.1	
	2.1							
	2.5							
								2.2
				2.1				
	2.1							
			3.1					
b. Validación del Teorema recta-punto con el Sistema Teórico de referencia				1.4				
								2.1
								1.3
							2.2	
c. Interpretación del antecedente y consecuente del teorema recta-punto			5.1					
							6.1	
							1.2	
							3.2	
				3.1				
				3.1				
				1.4				
							2.2	
d. Formulación del primer argumento de la demostración del Teorema recta-punto							5.2	
							4.1	
			2.2					
							2.2	
			2.2					
		2.1						
e. Propuestas de demostración para el T. recta – punto							2.2	
							2.3	
							4.1	
							5.1	
							4.1	
							4.1	
							3.2	

			5.1					
							3.2	
f. Formulación del enunciado del Teorema punto – rectas				2.1				
							2.1	
			2.1					
g. Inicio de la prueba del Teorema punto-rectas								1.3
							2.2	
							4.1	
			4.4					
							5.2	
							2.2	
h. Inicio de la formulación del enunciado del Teorema punto al lado-punto medio						1.1		
						1.1		
						2.2		
			4.4					
		1.2						
						1.4		
						1.3		
							5.1	
i. Identificación del antecedente y consecuente del Teorema punto al lado-punto medio								1.1
							1.5	
			5.2					
								1.1
		1.1						
								1.1
				3.1				
					1.3			
			2.1					
							2.1	
			2.3					
							3.1	
			2.1					

Tabla 11. Síntesis de resultados

4.4.1. Acciones del profesor para desarrollar el discurso en relación con el enunciado del Teorema

En la Tabla 11 se evidencian veintiocho acciones del profesor tendientes a desarrollar un discurso en torno al enunciado del teorema. La mayoría de estas acciones buscan convertir las respuestas de los estudiantes a los problemas formulados, en el enunciado de un teorema en específico. De estas acciones, quince fueron para actuar sobre un rasgo específico del discurso y trece fueron para promover un rasgo específico.

Adicionalmente, ocho estuvieron relacionadas con rutinas, trece con narrativas, dos con vocabulario y seis con mediadores (Ilustración 1). Como se puede evidenciar en la Tabla 11, todas las acciones del profesor que tienden a desarrollar un discurso al construir el enunciado del teorema surgieron en los fragmentos correspondientes a la formulación del teorema [a, f, i].

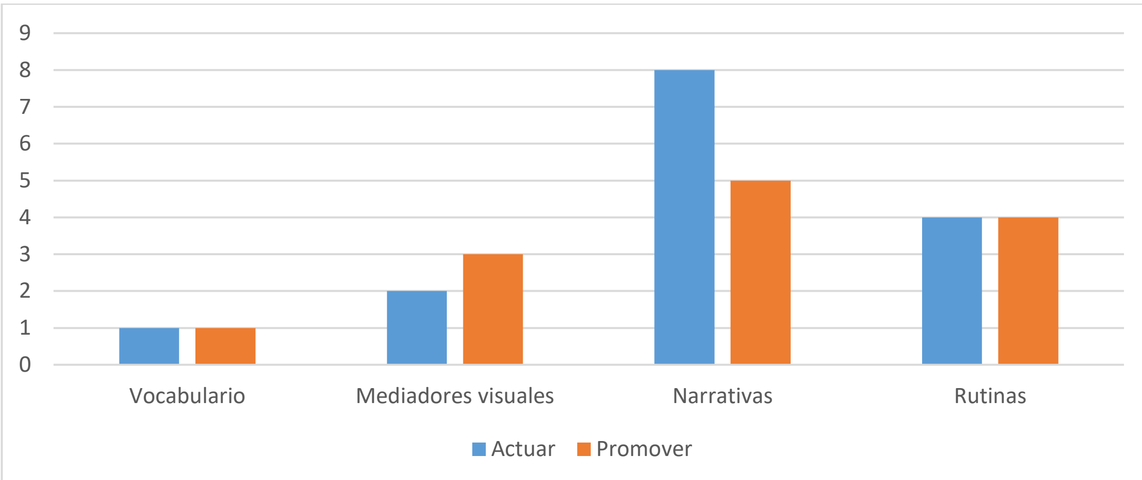


Ilustración 1 Acciones del profesor para formular el enunciado de un teorema

De las ocho acciones del profesor relacionadas con rutinas, se evidenciaron dos posibles rutinas generales que el profesor explicitó en la clase: 1) Cualquier teorema tiene una forma condicional, es decir, puede ser expresado como una proposición de la forma *si… entonces…*; 2) El antecedente y consecuente del enunciado de un teorema que se infiere a partir de una construcción, corresponden a las relaciones de dependencia implícitas en la construcción. La primera, corresponde a una rutina que se había establecido en el marco de referencia, y se evidencia en los fragmentos [a, f]. La segunda, es una rutina propia de la clase observada y se evidencia en el fragmento [i].

Respecto a la primera posible rutina con diferentes acciones que la constituye, es introducida por el profesor cuando empieza a involucrar a los estudiantes en la práctica de producción de teoremas. En primera instancia, el profesor explicita y ejemplifica la rutina durante la construcción del primer teorema. Para esto último, usa el enunciado correspondiente a una proposición que ellos identifican como un teorema (el Teorema de Pitágoras) y la expresa de forma condicional [a] [R-A.1.4]. Posteriormente, solicita a los estudiantes enunciarla [a] [R-P.2.2] y, además, como se muestra en la Tabla 12, para los dos primeros teoremas pide a los estudiantes usar la rutina explicitada para formularlos (T. recta – punto y del T. punto – rectas) [a, f] [R-A.2.1]. Mientras que para la formulación del enunciado del T. punto al lado – punto medio, es una estudiante quien de forma espontánea enuncia la rutina cuando el profesor solicita formular el enunciado.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">R1. El enunciado de un teorema tiene forma condicional</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Acción para actuar sobre la expresión discursiva del estudiante</td><td colspan="2">Institucionalización de la rutina: Explicita una norma socio-matemática asociada a una rutina [R-A.1.4]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Profesor: […] Estos teoremas son afirmaciones que uno realiza y casi siempre viene [formulados] de la siguiente manera: si algo pasa, entonces yo concluyo algo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hace énfasis en alguna de las acciones que conforman la rutina, como una forma de control respecto a su uso [R-A.2.1]</td></tr>
<tr><td>T. Recta-punto
Profesor: Acuérdenme ¿cómo era la escritura?
María: Con la T
Profesor: Bueno, con la T ¿cierto? Y también, si algo pasa…</td><td>T. Punto-rectas
Profesor: […] porque si es teorema, tendríamos que escribirlo como una afirmación que tiene ¿qué forma?</td></tr>
</table>

Tabla 12 Similitud para explicitar la primera rutina al formular el enunciado

La segunda posible rutina con diferentes acciones que la constituye, surge porque, al momento de formular el Teorema punto al lado-punto medio, para los estudiantes reconocer que el enunciado de un teorema debe expresarse como una condicional, no fue suficiente para que pudieran determinar las proposiciones correspondientes al antecedente y al consecuente, respectivamente. El profesor se encarga de que, con ayuda de la construcción realizada en GeoGebra, los estudiantes identifiquen el antecedente y el consecuente del enunciado. Así, en la Tabla 13 se muestra la secuencia que utiliza el profesor para explicitarla. Primero retoma algunas expresiones de los estudiantes, para decir que el antecedente corresponde a los primeros objetos construidos, al resultado obtenido en la construcción [i] [R-P.1.1] y posteriormente, para sugerir parte del enunciado del teorema a partir de la expresión discursiva de una estudiante [i] [R.A.3.1].

<table>
<tr><td></td><td>R2. El antecedente y consecuente del teorema corresponden a las relaciones de dependencia implícitas en una construcción</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Acción para promover la expresión discursiva del estudiante</td><td>Pide formular el enunciado condicional que corresponde al resultado de la exploración [R-P.1.1]</td></tr>
<tr><td>Profesor: Bien, Juan Pablo, vamos a intentar escribir lo que acabamos de hacer como un teorema.
Profesor: Ah, no podríamos hablar del punto B todavía, pero entonces ¿por dónde arranco acá? Si ¿qué?
Profesor: Bueno, pero miren lo que queremos hacer nosotros, miren el problema. Hay dos puntos, ahí los nombrábamos (…) María José (…) Dana (…) ¿Qué quería yo hacer? ¿Encontrar quién?</td></tr>
</table>

Acción para actuar sobre la expresión discursiva del estudiante	Sugiere cómo identificar el antecedente de la proposición. [R-A.3.1]
	Profesor: *¿Qué quería yo hacer?* Luisa: *Encontrar B […] Para que M sea el punto medio de A y B* Profesor: *Ah bueno**, esa es la información que yo necesito colocar acá [en el tablero]. Entonces, tú me dices Si hay M punto**, podríamos entonces, por acá, tenías una idea, ¿cierto? (Señalando a Luisa)*

Tabla 13. Secuencia para explicitar la segunda rutina al formular el enunciado

De las trece acciones del profesor relacionado con narrativas, doce apuntaron a que los estudiantes empezaran a elaborar las narrativas que corresponden a cada teorema. En particular, este apartado se centra en la formulación de los enunciados del teorema en correspondencia con las dos rutinas explicitada anteriormente [a, f, i]. Es decir, de la formulación de las siguientes proposiciones:

P1. *Si m es una recta, entonces existe un punto en m.*

P2. *Si A es un punto entonces existen infinitas rectas m que lo contienen.*

P3. Si A y M son puntos entonces existe un punto B tal que M es punto medio del $\overline{AB}$.

Por otra parte, el profesor evoca una narrativa en torno a la cual los estudiantes han trabajado en sesiones anteriores, y cuya validez está determinada por el uso repetitivo de la misma en diferentes cursos [a] [N-A.3.1]:

P4. Si se tiene un triángulo rectángulo, entonces existe una relación entre sus lados.

Respecto a la primera narrativa, se identificaron dos acciones tendientes a formular la proposición: realizar una pregunta concreta para formular el consecuente [a] [N-P.2.1] y formular el enunciado del teorema sintetizando lo expuesto por los estudiantes [a] [N-A.3.1]. Algo parecido sucede con la segunda narrativa, pues: Primero solicita completar el consecuente del enunciado que propone un estudiante [f] [N-P.2.1] y luego institucionaliza el enunciado del teorema, con algunas modificaciones [f] [N-A.2.1] (Tabla 14).

	P1. Si m es una recta, entonces existe un punto en m.	P2. Si A es un punto entonces existen infinitas rectas m que lo contienen.
Acción para promover la expresión discursiva del estudiante	El profesor pregunta por el consecuente de la proposición que se busca formular [N-P.2.1]	
	Profesor: *Porque una vez que usted seleccionó la recta, apareció un punto, volvió a seleccionar en otro lado y apareció otro punto y la recta. Así,* ***¿por ahora podríamos decir***	Nicolás: *Sería, si A es un punto, entonces existen infinitas rectas m.* Profesor: *[Escribe en el tablero lo que dice Nicolás] ¿**No falta algo**?*

	que las rectas cuántos puntos tendrían?	
Acción para actuar sobre la expresión discursiva del estudiante	El profesor expresa la proposición sintetizando lo expresado por los estudiantes [N-A.3.1]	El profesor expresa la proposición modificando lo expresado por los estudiantes [N-A.2.1]
	Profesor: […] *Así, ¿por ahora podríamos decir que las rectas cuantos puntos tendrían?* Coro: Dos […] Profesor: […] *Entonces* ***si m es una recta, entonces existe un punto en m*** *[escribe el enunciado del teorema en el tablero].*	Laura: *que los contienen* Profesor: *Sería si A es un punto, entonces existe infinitas rectas m* ***que lo contiene.***

Tabla 14. Similitud en la secuencia de acciones asociadas a narrativas para llegar a las proposiciones correspondientes con los dos primeros teoremas

A diferencia de los primeros teoremas, en la formulación del Teorema punto al lado-punto medio se evidencian más acciones encaminadas hacia el desarrollo de narrativas, ya que, si bien los estudiantes enunciaban la primera rutina establecida, no era claro para ellos qué proposiciones debían colocarse en el antecedente y el consecuente. Por ello, el profesor va dirigiendo a los estudiantes a que descubran y elaboren estas proposiciones. Durante el tercer teorema, con un total de seis acciones asociadas a narrativas, el profesor realiza un procedimiento parecido al realizado con la formulación de los dos primeros teoremas. Primero, hace que los estudiantes comprendieran el por qué la primera propuesta del estudiante no es correcta vista desde el antecedente descrito [i] [N-P.1.5; N-A.5.2] concluyendo por los estudiantes la primera parte de la proposición, luego en la tercera y cuarta narrativa, el profesor busca que los estudiantes centren la atención en la conclusión del problema vista en la solución en GGB [i] [N-A.2.1; N-P.2.1], y las demás narrativas ayudaron a construir el consecuente del enunciado. Por una parte, agrupa las ideas sueltas y enuncia una parte importante del consecuente que debía ser enunciado [i] [N-A.2.3], luego pide elegir por el objeto matemático conveniente para concluir el enunciado [i] [N-P.3.1] y, en la última narrativa el profesor enuncia y escribe en el tablero la proposición completa del teorema [i] [N-A.2.1]. En la Tabla 15 se muestra la secuencia utilizada para formular la proposición del Teorema punto al lado-punto medio, evidenciando que a comparación de la secuencia expuesta en la Tabla 14, la proposición fue escita en el tablero de manera progresiva mediante cuatro acciones por medio de expresiones del profesor y modificaciones tanto del profesor como de los estudiantes para llegar al enunciado del teorema:

	P3. Si A y M son puntos entonces existe un punto B tal que M es punto medio del $\overline{AB}$.

<table>
<tr><td rowspan="2">El profesor realiza dos acciones para expresar el antecedente de la proposición que se busca formular</td><td colspan="2">Pide opinar sobre el enunciado propuesto para un teorema [N-P.1.5]</td><td>Resalta la narrativa de un estudiante para refutar el antecedente o el consecuente del enunciado [N-A.5.2]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Juan Pablo: ***Si* B *está en la circunferencia***, *entonces A y* M_1 *están conectadas (mira el cuaderno). No, si* B *está en la circunferencia en el centro de* M_1, *entonces* A *y* B *están conectados entre un orden.*
Profesor: *A ver, qué dice Sergio,* ***de acuerdo o no de acuerdo***</td><td>Sergio: *No, porque no es el punto* B*.*
Profesor: *Ah* ***no podríamos hablar del punto*** B ***todavía****, Pero entonces ¿por dónde arranco acá? Si ¿qué?*
Sergio: *Si hay un punto* M
[…]
Profesor: *[…] entonces vamos a colocar si* A *y M puntos (escribe en el tablero)*</td></tr>
<tr><td rowspan="2">El profesor realiza dos acciones para centrar la atención en la parte final de la construcción en GGB.</td><td colspan="2">Explicita o complementa el enunciado del teorema [N-A.2.1]</td><td>Solicita completar un enunciado condicional; incluyendo el antecedente, el consecuente o elementos de estos [N-P.2.1]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Profesor: *Es que, aunque haya una recta, en realidad lo estaba preguntando por el punto medio del segmento, ¿cierto? Que* M *sea el punto medio, es decir, si* A *y* M *son puntos, entonces existe…*</td><td>Profesor: *[…] Existe ¿quién? ¿la recta? ¿Queríamos encontrar una recta? O ¿qué queríamos encontrar?*</td></tr>
<tr><td rowspan="2">El profesor realiza tres acciones para terminar de expresar la proposición, elaborando el consecuente.</td><td>Explicita las afirmaciones que se tienen hasta el momento [N-A.2.3]</td><td>Completa o modifica el enunciado condicional del teorema [N-P.3.1]</td><td>Explicita o complementa el enunciado del teorema [N-A.2.1]</td></tr>
<tr><td>Profesor: *(Copia en el tablero) Existe* B *punto tal que ¿qué?* ***M es el punto medio ¿de quién?***</td><td>Profesor: *¿De la recta AB o del segmento?*
Paula: *Del segmento* AB</td><td>Profesor: *[…] Entonces, (Mientras lee en el tablero)* ***tal que M es punto medio del segmento*** AB ***(copia en el tablero)****. Si señores, así quedaría bien.*</td></tr>
</table>

Tabla 15 Secuencia de narrativas para llegar a la proposición correspondiente al T. Punto al lado-punto medio

Finalmente, existe una relación entre las rutinas y narrativas, pues luego de que el profesor explicita o realiza alguna rutina general, busca la forma de que los estudiantes elaboren el enunciado condicional por medio del uso de la rutina. La mayoría de las ocasiones, el profesor es quien va dirigiendo, corrigiendo y elaborando la proposición por medio de narrativas para promover la rutina, mientras que los estudiantes van colaborando a que se vaya construyendo de forma condicional el enunciado.

Se menciona también que, durante la construcción en GeoGebra de la solución del problema para el tercer teorema analizado, se evidencia una narrativa sin que se haya nombrado anteriormente alguna rutina. En ella, el profesor hace referencia a que se debe seguir un orden específico para hacer la construcción en GeoGebra colocando así primero los objetos matemáticos que están dados desde el principio de teorema [h] [N-A.4.4].

Respecto a mediadores visuales, se evidenciaron acciones del profesor tendientes a actuar o promover su uso en seis ocasiones, cinco de ellas durante la construcción del enunciado del tercer teorema [h, i] y una la formulación del enunciado del primer teorema [a]. En ambos momentos, el mediador visual corresponde a la construcción realizada en GeoGebra por un estudiante, para resolver el problema que desencadenó la formulación del respectivo teorema. En la formulación del tercer teorema, corresponde a la construcción realizada para responder el problema *Dados dos puntos A y M, construir un punto B de tal forma que M sea punto medio del segmento AB* (Ilustración 2). En la formulación del primer teorema, corresponde a la construcción realizada para solucionar el problema "*construya una recta en GeoGebra*" (Ilustración 3).

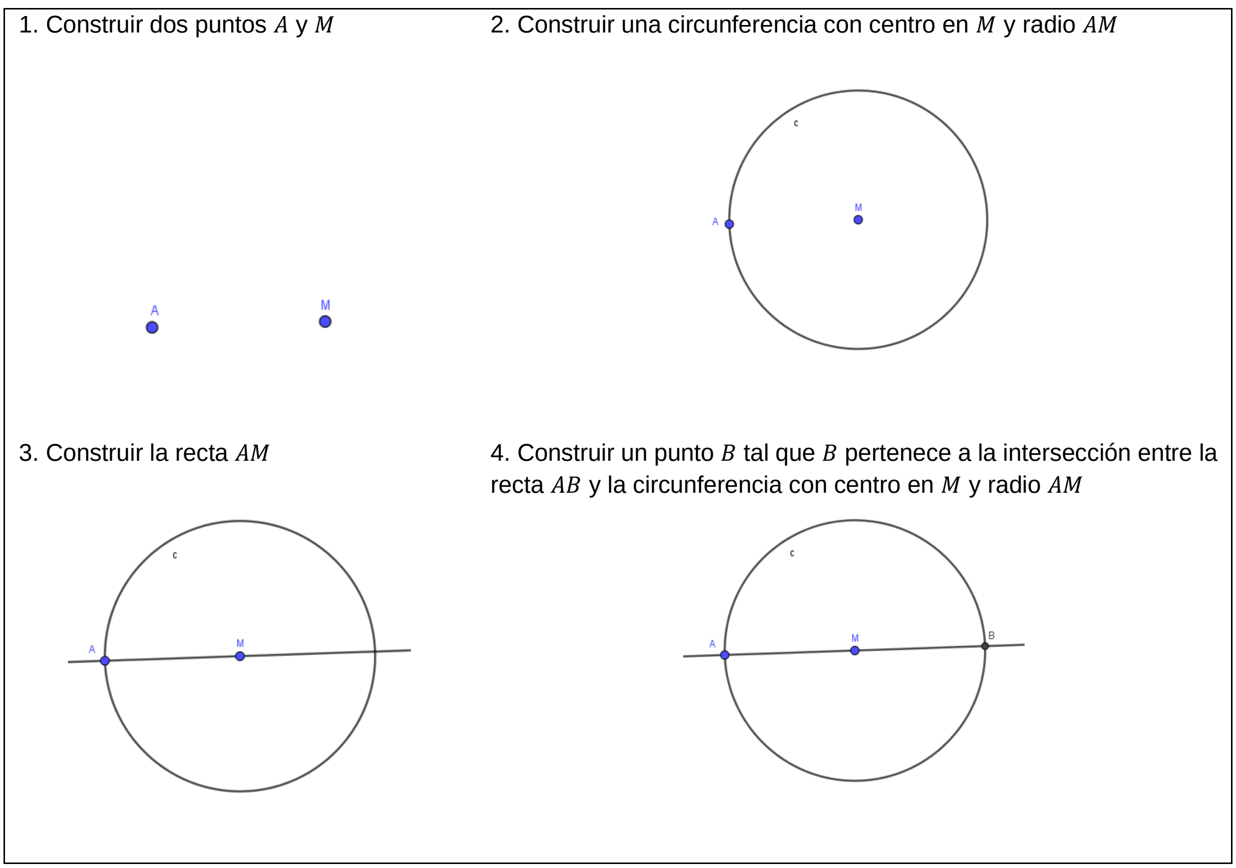
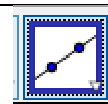
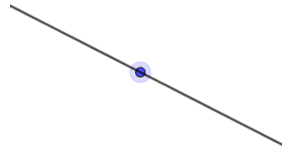


Ilustración 2. Construcción en GeoGebra de la solución del problema respecto al tercer teorema

1. Seleccionar la opción recta.



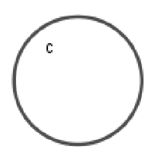
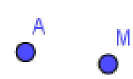
2. Al hacer clic en la vista gráfica, se genera simultaneamente una recta movible y un punto.



3. Se vuelve a hacer clik en algun lugar de la pantalla para que la recta esté estática, generando un nuevo punto.

Ilustración 3. Construcción en GeoGebra de la solución del problema respecto al primer teorema

Con respecto a los dos mediadores, fue común que el profesor utilizara la construcción propuesta por un estudiante para identificar el antecedente y el consecuente de un teorema [a, i] [M-A.1.1]. Tal vez por el hecho de que en el mediador asociado al teorema punto medio – punto al lado, hubo más elementos involucrados, esta acción no fue suficiente. Por lo cual, para establecer la correspondencia entre la construcción y el enunciado del teorema, fue necesario que el profesor le preguntará a la estudiante por el primer objeto matemático que involucró en la construcción [h] [M-P.1.1] y por los objetos que se indican como dados en el enunciado del problema [h] [M-P.1.1], para luego precisar que los objetos que se asumen como dados en el enunciado del problema que se debe empezar la construcción [h] [M-A.1.2]. Así, en la Tabla 16 se presenta la relación de la formulación del enunciado con las acciones que el profesor va manifestándole a la estudiante respecto a la construcción que va realizando y los objetos dados al inicio del problema:

	Acciones del profesor	Mediador visual	
		Propuesta del estudiante	Lo que requiere el profesor
Rutina relacionada con el antecedente del enunciado	Bueno cuéntanos, **¿qué vas a hacer?**		
	Pero hay un problema, **porque de dónde se parte (el problema)**		

	¿De un punto? O **de cuántos**		
	Entonces **no puedo hacer una circunferencia, primero** se crean **los dos puntos.**		

Tabla 16. Relación entre la construcción en GeoGebra con la formulación del antecedente del enunciado del Teorema punto al lado-punto medio

Finalmente, respecto a vocabulario, no se presentaron acciones tendientes al desarrollo de este rasgo que se repitieran en la formulación de por lo menos dos de los teoremas analizados. No obstante, se presentaron dos acciones referentes a vocabulario: uno en el Teorema recta-punto y el otro en el Teorema punto al lado-punto medio, en las cuales se atañe a dos asuntos relacionados con el vocabulario:

> V1. Los enunciados de los teoremas se formulan usando el conector lógico *sí…. Entonces.*

> V2. Los enunciados de los teoremas se formulan usando los términos y la notación que se ha acordado en la comunidad.

Así, la primera acción contribuye a ejemplificar conector que debe usarse en los enunciados de los teoremas, a partir de la formulación condicional del teorema de Pitágoras [a] [V-A.4.2], aludiendo a V1. En la segunda acción, el profesor encamina al estudiante a nombrar correctamente los puntos que deben ser escritos en el antecedente del teorema [i] [V-P.1.3] haciendo referencia a V2.

4.4.2. Acciones del profesor para desarrollar el discurso en relación con la demostración del Teorema

Se identificaron treinta y cuatro acciones del profesor tendientes a desarrollar un discurso en torno a la demostración de un teorema, como se indica en la Ilustración 4. Once de ellas para actuar sobre un rasgo específico del discurso y veintitrés acciones para promover el discurso dentro del aula. De las acciones encontradas, tres fueron respecto a mediadores visuales, veinticinco de narrativas y seis de rutinas. Como se presenta en la Tabla 11, aquellas acciones del profesor que tienden a desarrollar un discurso en relación con la demostración del teorema, la mayoría surgieron luego de haber institucionalizado el enunciado de los teoremas [b, c, d, e, g] y unas pocas se evidenciaron mientras se estaba formulando tal enunciado [a, h].

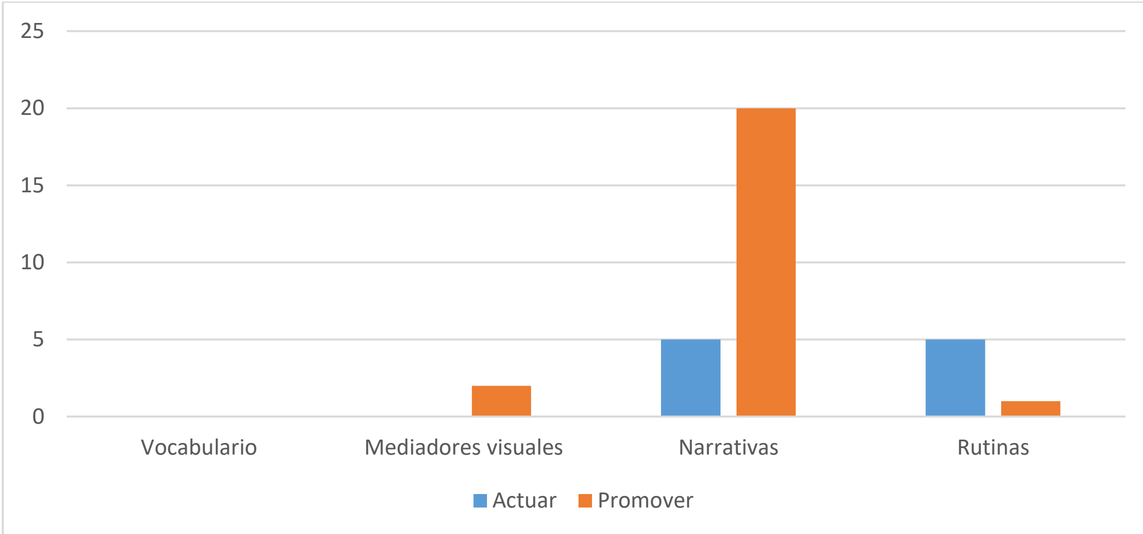


Ilustración 4 Acciones del profesor al momento de demostrar un teorema

Las rutinas generales evidenciadas mientras se desarrolla la demostración de los teoremas, son:

R1. Para validar un teorema, este debe ser demostrado a partir de los elementos del sistema teórico que se tienen institucionalizados en el curso, con pasos secuenciales y lógicos, hasta llegar a la conclusión del mismo y terminar con la demostración [b, g];

R2. Los objetos dados en el antecedente del enunciado se deben tomar como válidos y a partir de aquellos objetos se empieza la demostración [c].

La primera rutina se hace explícita durante el inicio de la demostración del teorema recta-punto, pues el profesor afirma que un teorema debe ser validado conforme al sistema teórico del curso [b] [R-A.1.4]. Luego, durante el inicio de la demostración de los dos primeros teoremas, el profesor pregunta si aquellos pueden ser demostrables con respecto a los postulados, definiciones o teoremas que se han institucionalizado en clase hasta ese momento [b, g] [R-P.1.3]. Aquellas similitudes respecto a la rutina R1 se muestra en la Tabla 17:

	R1. Un teorema se demuestra utilizando el sistema teórico como referencia
Acción para actuar sobre la expresión discursiva del estudiante	Explicita una norma socio-matemática asociada a una rutina [R-A.1.4]
	T. Recta-punto Profesor*: […] Miren,* ***cuando tenemos un teorema, podemos decir algunas cosas que tenemos de nuestro sistema teórico que nos permitan validarlo*** *¿listo?*

<table>
<tr><td rowspan="2">Acción espontánea de la estudiante</td><td colspan="2">Pide entrelazar o relacionar dos o más elementos del sistema teórico para efectuar la demostración del teorema [R-P.1.3]</td></tr>
<tr><td>T. Recta-punto
Profesor: […] yo quiero saber si este teorema (recta – punto) lo podríamos validar con respecto a los dos postulados que tenemos (P. Existencia y P. Conjunto de Puntos).</td><td>T. Punto-rectas
Profesor: Si dices que es teorema, ¿se puede decir algo de él con respecto a los postulados y teoremas que vimos anteriormente?</td></tr>
</table>

Tabla 17 Similitud para explicitar la primera rutina al demostrar el enunciado

La segunda rutina evidenciada durante el primer teorema surge cuando el profesor interpreta las intervenciones de una estudiante cuando propone una demostración para el teorema. Allí, en la Tabla 18 se muestra la secuencia utilizada por el profesor para hacerla explicita. Primero lee el enunciado del teorema y pregunta por las afirmaciones a partir de las cuales se debe empezar la demostración del teorema [c] [R-A.3.1]. Después les informa que efectivamente los objetos mencionados en el antecedente del enunciado del teorema, ya se deben tomar como válidos y además se parte de allí para elaborar su demostración [c] [R-A.1.4].

<table>
<tr><td></td><td>R2. Los objetos dados en el antecedente del enunciado se deben tomar como válidos</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Acción para actuar sobre la expresión discursiva del estudiante</td><td>Sugiere cómo identificar el antecedente y el consecuente de una proposición. [R-A.3.1]</td></tr>
<tr><td>Daniela: Pues como vimos ahí, se puede empezar desde la recta o desde el punto.
Profesor: Sí, pero les voy a leer el teorema para que digan algo con respeto a los dos postulados. Dije: Si m es una recta, entonces existe un punto en m. ¿Cierto? Y estábamos discutiendo si partíamos de la recta o el punto.
Profesor: Porque es que yo llegué y dije miren: Si m es una recta, no dije si m es un punto. Entonces ¿de dónde partimos?</td></tr>
<tr><td>Explicita una norma socio-matemática asociada a una rutina [R-A.1.4]</td></tr>
<tr><td>Profesor: Ah. Es que los teoremas tienen algo en particular, resulta que después de que usted pone acá el sí (señalando el antecedente del teorema), es el objeto que tiene. Acá dice, si m es una recta, entonces tengo mi recta.</td></tr>
</table>

Tabla 18 Secuencia para explicitar la segunda rutina al demostrar el teorema

Para que los estudiantes se vayan familiarizando con la forma en que se valida un teorema, el profesor es quien a partir de narrativas encamina al estudiante a llegar con el objetivo. Así, ocho acciones están relacionadas con narrativas que apuntaron a que los estudiantes comprendieran la segunda rutina:

R2. Los objetos dados en el antecedente del enunciado se deben tomar como válidos

T. Recta-punto	T. Punto-rectas
N1. La demostración del teorema se parte de la recta, más no del punto [cinco narrativas].	N2. No es necesario nombrar el postulado existencia para tener la existencia del punto [tres Narrativas].

Tabla 19 Enunciado de las narrativas respecto a la segunda rutina

Para ello, la Tabla 20 muestra que el profesor luego de preguntar por los postulados, las definiciones o los teoremas que servirían como garantía para elaborar la demostración de los teoremas, utiliza la misma acción respecto a narrativas para preguntarle a algún estudiante el cómo se podría empezar a validar cada uno de los teoremas [b, g] [N-P.2.2]. Tal acción va en correspondencia con la primera rutina (R1) y es secuencial a la segunda acción de rutinas, según la segunda parte de la Tabla 17, evidenciando allí una secuencia de acciones consecutivas e iguales durante una parte de la demostración de cada uno de los teoremas:

	R1. Un teorema se demuestra utilizando el sistema teórico como referencia	
Acción para promover la expresión discursiva del estudiante	El profesor pregunta por el inicio de la validación del teorema [N-P.2.2]	
	T. Recta-punto	T. Punto-rectas
	Profesor: […] yo quiero saber si este teorema lo podríamos validar con respecto a los dos postulados que tenemos. Tú (Mar) **¿qué dices? ¿Cómo podríamos hacerlo?**	Profesor: […] ¿se puede decir algo de él con respecto a los postulados y teoremas que vimos anteriormente? **¿Cómo podríamos iniciar?** María del Mar, **¿qué se te ocurre?**

Tabla 20 Similitud en la narrativa inicial para empezar con la demostración del teorema

Para llegar a concluir las primeras dos narrativas (N1; N2) correspondientes a la segunda rutina (R2), el profesor en el primer caso utiliza cuatro acciones respecto a narrativas, tres de ellas tendientes a promover el discurso. El suceso respectivo para institucionalizar tal rutina fue: el profesor primero intenta parafrasear la idea de demostración de una estudiante [c] [N-A.5.1], preguntando si es razonable pensar en la opinión de la compañera [c] [N-P.6.1]. Luego, pregunta si se debe partir por los objetos dados en el consecuente del teorema [c] [N-P.1.2] a lo que otra estudiante opina lo contrario, allí el profesor para seguir con la dinámica pide comparar las dos posturas y decidir con qué objeto matemático parte la demostración, si del punto o de la recta [c] [N-P.3.2] para finalmente institucionalizar y explicitar la segunda rutina. En el segundo caso, pues a pesar de ya haber institucionalizado aquella rutina, durante el intento de demostración del segundo teorema, los estudiantes en primera instancia deciden empezar la demostración como si no tuvieran algún objeto matemático dado desde el inicio, pues piden utilizar el postulado existencia como primera garantía. Por tanto, el profesor tuvo como reacción lo siguiente: primero pregunta si es necesario hablar de aquel postulado para corroborar que el punto existe [g] [N-P.4.1]; y luego, vuelve a enunciar el antecedente del teorema para especificarles a los estudiantes que efectivamente el punto ya está dado desde un inicio y no habría necesidad de validarlo respecto a algún elemento del sistema teórico, en este caso el postulado existencia [g] [N-A.4.4]. Así, en la Tabla 21 se presenta la secuencia de acciones que tuvo el profesor durante los casos de demostraciones:

<table>
<tr><th colspan="4">R2. Los objetos dados en el antecedente del enunciado se deben tomar como válidos</th></tr>
<tr><td colspan="2">N1. La demostración del teorema se parte de la recta, más no del punto</td><td colspan="2">N2. No es necesario nombrar el postulado existencia para tener la existencia del punto</td></tr>
<tr><td colspan="2">T. Recta-punto</td><td colspan="2">T. Punto-rectas</td></tr>
<tr><td>NA.5.1</td><td>Profesor: […] Porque haber, les voy a decir lo que yo le entiendo a María de Mar (…) Tú me debes decir si es cierto o no ¿listo? Me dices que existe un punto y de ahí sale una recta</td><td rowspan="2">NP.4.1</td><td rowspan="2">Profesor: ¿Todos de acuerdo con esa [idea]? ¿Necesitamos primero hablar de ese postulado de existencia? ¿Qué dice Julián?</td></tr>
<tr><td>NP.6.1</td><td>Profesor: ¿ustedes qué dirían?</td></tr>
<tr><td>NP.1.2</td><td>Profesor: Bueno, qué dirían ustedes, (…) O sea, yo parto de un punto, ¿para todos es cierto que partimos de un punto?</td><td rowspan="2">NA.4.4</td><td rowspan="2">Profesor: Pero acá (enunciado del teorema) me dice “si A es un punto” [lo lee del tablero]. Ahí está dado A ¿cierto? De que existe A, ya está. O sea, no necesariamente tendría que irme al postulado de la existencia para garantizar que existe A, ¿cierto? A ya está</td></tr>
<tr><td>NP.3.2</td><td>Profesor: Entonces quiero que me digan, porque hay dos posturas: Una que parte del punto y otra que partimos de la recta. ¿Quiénes están en contra? ¿Y a favor? ¿De dónde partimos, del punto o de la recta?</td></tr>
</table>

Tabla 21 Secuencia de acciones para deducir R1 y llegar a concluir N1 y N2 como primera parte para demostrar los teoremas

Las demás acciones del profesor relacionadas con narrativas tienen como objetivo que los estudiantes elaboren las garantías necesarias según el sistema teórico para demostrar el enunciado del teorema, en correspondencia con la primera rutina:

<table>
<tr><th colspan="2">R1. Un teorema se demuestra utilizando el sistema teórico como referencia</th></tr>
<tr><td>T. Recta-punto</td><td>T. Punto-rectas</td></tr>
<tr><td>N3. El procedimiento para garantizar que existe un punto A, en la recta m es…</td><td>N4. El procedimiento para garantizar las infinitas rectas que contienen al punto A es…</td></tr>
</table>

El profesor en primera instancia centra la atención en que los estudiantes respondan alguna garantía necesaria para llegar a la conclusión de la proposición [c, g] [N-P.2.4; N-P.5.2]. Luego, surge una contradicción respecto a los objetos matemáticos que se deben tener como válidos sin necesidad de demostrar su existencia como se manifiesta en la

Tabla 22. Pues, por una parte, en el fragmento [d] se encuentran cuatro acciones del profesor el cual enfoca al estudiante a encontrar la primera garantía del Teorema recta-punto que corresponde en avalar la existencia del objeto matemático nombrado en el antecedente. Empieza preguntando por el primer postulado a utilizar [d] [N-P.5.2]; como una estudiante responde el postulado de existencia, el profesor pregunta si se puede arrancar por la idea que dice la compañera [d] [N-P.4.1], afirma que definitivamente existe aquel objeto nombrado en el antecedente por aquel postulado [d] [N-A.2.2], y lo institucionaliza escribiendo en el tablero aquella información [d] [N-A.2.2].

A diferencia de lo que sucede en el fragmento [g], para elaborar la primera garantía del Teorema punto-rectas, ya que el profesor les recuerda a los estudiantes que el objeto del antecedente se tiene como dado y pregunta por los objetos matemáticos que deberían ser los segundos por garantizar, enfatizándose en aquellas rectas a las cuales hay que demostrar su existencia [g] [N-P.2.2].

R1. Un teorema se demuestra utilizando el sistema teórico como referencia	
N3. El procedimiento para garantizar que existe un punto A, en la recta m es…	N4. El procedimiento para garantizar las infinitas rectas que contienen al punto A es…
Pide opinar sobre los datos, la garantía o la aserción de un argumento que hace parte de una propuesta de demostración [N-P.4.1] Explicita el primer o siguiente paso en una cadena de argumentos [N-A.2.2]	Establece el valor de verdad de la hipótesis del enunciado de un teorema en el marco del sistema teórico local [N-A.4.4]
¿Si podríamos arrancar por el postulado de la existencia? Entonces decimos, bueno: ***¿existe la recta m? sí****, ¿por qué?* ***Porque tenemos un postulado donde dice que existen las rectas***	*[…]* ***no necesariamente tendría que irme al postulado de la existencia para garantizar que existe A****, ¿cierto? A ya está.*
Explicita el primer o siguiente paso en una cadena de argumentos [N-A.2.2]	Solicita explicitar un paso de un problema o de una cadena de argumentos [N-P.2.2]
[…] Garantizamos la existencia de esta recta (recta m), entonces ***vamos a escribir que por el postulado*** *¿cómo era que lo llamábamos? ¿Existencia cierto?* ***Existencia, existe la recta m***	*[…]* ***Por ahora tenemos el punto A*** *¿no? ¿Qué más podríamos garantizar?* ***¿Qué necesitamos para que haya otra recta?***

Tabla 22 Diferencia entre las narrativas dichas por el profesor al utilizar el P. Existencia como primera garantía

Finalmente, para seguir con la demostración del Teorema punto-rectas, con las acciones respecto a narrativas que siguen enfocadas en la primera rutina, el profesor: Primero menciona que ya se sabe de la existencia de la recta y pregunta por el segundo paso a garantizar [e] [N-P.2.2], tal y como lo realiza durante el teorema punto-rectas (Tabla 23):

Solicita explicitar un paso de un problema o de una cadena de argumentos [N-P.2.2]	
N3. El procedimiento para garantizar que existe un punto A, en la recta m es…	N4. El procedimiento para garantizar las infinitas rectas que contienen al punto A es…
Listo, y ¿qué más?, ***ya tenemos la existencia de la recta****, ahora* ***¿qué tendría yo que garantizar?*** *(… … …) [Los estudiantes están anotando en los cuadernos]* ***¿Qué necesito yo?***	***Por ahora tenemos el punto A*** *¿no?* ***¿Qué más podríamos garantizar?*** *¿Qué necesitamos para que haya otra recta?*

Tabla 23 Similitud al preguntar por la siguiente garantía a utilizar

Luego surgen ocho acciones para realizar un intento de demostración del Teorema recta-punto a partir de una cadena de argumentos con una garantía perteneciente al sistema teórico [e]. Allí el profesor a partir de preguntas va generando discusiones en clase respecto a las garantías por seguir.

Pregunta 1. Solicita una garantía para afirmar que existe un punto en la recta m [N-P.2.3].	[…] entonces cómo podría garantizar que hay un punto ahí. Vamos a mirar cómo lo hicieron
Pregunta 2. Postulado conjunto de puntos como segunda garantía [N-P.4.1]	[…] ¿Tú qué dirías? ¿Sí podemos usar ese postulado o no?
Pregunta 3. Solicita un argumento para utilizar el postulado conjunto de puntos [N-P.5.1]	¿Por qué?
Pregunta 4. Solicita una Postura ante el argumento dado por una estudiante [N-P.4.1]	Paola: Poner el punto, porque el postulado conjunto de puntos dice que la recta es un conjunto de puntos Profesor: ¿Qué dicen ustedes?
Pregunta 5. Solicita una **p**ostura ante el argumento dado por dos estudiantes [N-P.4.1]	Daniela: Solo faltaría escoger un punto sobre la recta Profesor: Pero yo no veo a muchos tan convencidos, por ejemplo, a María Jose no la veo tan convencida. Ustedes qué dicen, sí o no.
Pregunta 6. Postura ante los dos caminos que existen utilizando una misma garantía [N-P.3.2]	O cuál de las dos, porque son dos posturas diferentes. O de pronto sale una nueva, ¿Diego qué opina? (…) ¿Sí podríamos usar el postulado?
Afirmación 1. Agrupa los dos argumentos que son expuestos por una garantía [N-A.5.1]	La idea de Paola es que usemos el postulado conjunto de puntos porque el postulado nos garantiza que la recta es un conjunto de puntos, eso nos garantiza que por lo menos debe haber uno. Y la idea de Sofía es, no, no lo podemos usar, lo que debemos hacer es que haya un punto, vamos a ver si la entendí, o si no tú me dices ¿listo? Que hay un punto externo
Pregunta 7. Solicita una postura para	Bueno, en todo caso, me parece que hay una

elaborar la demostración del teorema [N-P.3.2]	postura y hay que mirar por qué lado irnos y saber si aparece otra

En cuanto a mediadores visuales, se muestran dos acciones del profesor tendientes a promover su uso, ambas asociadas al mediador representado en la Ilustración 2, y que corresponde a la construcción geométrica realizada en Geogebra para solucionar el problema que condujo a la formulación del T. punto medio – punto al lado. A pesar de que en este teorema no se formuló su demostración, se evidencia una acción tendiente a que un estudiante explique por qué se requiere construir un objeto (circunferencia y recta) para solucionar el problema [M-P.1.4]. En la Tabla 24, se muestra la secuencia que siguieron los estudiantes y el profesor con sus respectivos argumentos.

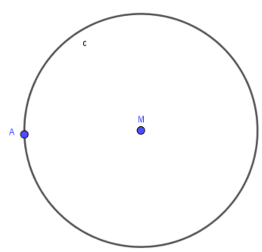
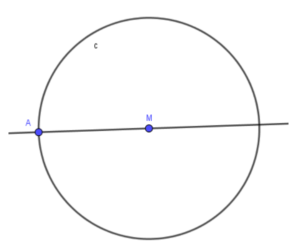
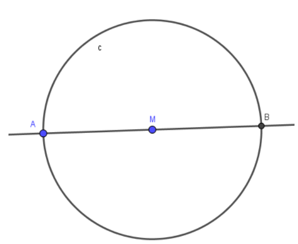
Construcción	Acción del profesor	Argumento del estudiante
	Bueno, voy preguntando, por qué vas a hacer una circunferencia, o por qué creen los demás que vamos a hacer una circunferencia y ¿por qué no hacer otra cosa?	
	¿Es necesario construir la recta que nombraron?	La recta es para que cuando mueva el punto A, no se cambie el punto M, que no cambie, que no deje de ser el punto medio.
	Qué dice María José, está de acuerdo o no (…) y tampoco me han dado respuesta, quiero que tú lo hagas, del por qué utilizar circunferencia	Para encontrar las mismas distancias

Tabla 24 Secuencia de argumentos por cada construcción realizada

4.4.3. Acciones del profesor para desarrollar el discurso en relación con el sistema teórico en uso

En la Tabla 11 se evidencian ocho acciones del profesor tendientes a desarrollar un discurso en torno al sistema teórico usado como soporte para elaborar el teorema, todas ellas en torno a la elaboración e institucionalización del Teorema recta-punto [a, b, d]. De las acciones, tres fueron para actuar sobre un rasgo específico y cinco para promover un rasgo específico. Además, en la Ilustración 5 se muestra que dos acciones estuvieron relacionadas con rutinas, dos con narrativas y cuatro con vocabulario.

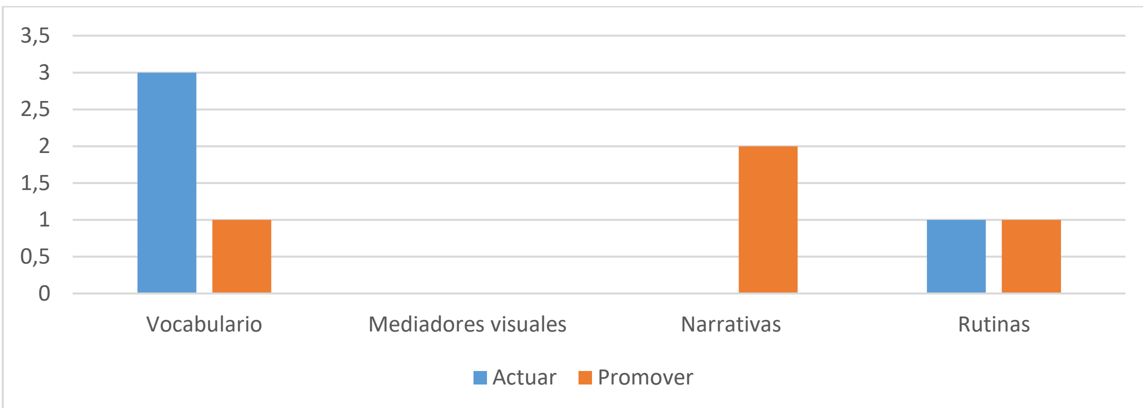


Ilustración 5 Acciones del profesor para desarrollar el sistema teórico del curso en torno a un teorema

Las dos acciones relacionadas con rutinas corresponden a dos rutinas generales diferentes que el profesor explicita en la clase, de tal forma que las rutinas generales son las siguientes: R1. Los postulados son afirmaciones que se aceptan como válidas; R2. El sistema teórico está conformado por postulados, definiciones y teoremas, cada uno corresponde a un enunciado con un nombre en particular. La primera es evidenciada cuando empiezan a formular el enunciado del teorema [a] y la segunda cuando recién empiezan a validarlo [b].

La primera rutina [a], es introducida por el profesor cuando empieza a involucrar a los estudiantes en la práctica de producción de teoremas. Allí, luego de mostrar la forma condicional que tienen los teoremas, como se muestra en la primera parte de la Tabla 12, el profesor afirma que el primer elemento del sistema teórico corresponde a un postulado, el cual deben asumirse como afirmaciones que se aceptan como verdaderas [R-A.1.4].

	R1. Los postulados son afirmaciones que se aceptan como válidas
Acción para	Explicita una norma socio-matemática asociada a una rutina [R-A.1.4]

actuar sobre la expresión discursiva del estudiante	T. Recta-punto Profesor: *Entonces por ejemplo si yo tengo un triángulo rectángulo, voy a tener, entonces una relación con sus lados que ahorita no me interesa, pero* ***siempre vamos a tener este tipo de proposiciones*** *(señala lo escrito en el tablero). Bien, entonces* ***vamos a arrancar con los postulado****s, que* ***son las afirmaciones que aceptamos como verdaderas*** *(...)*

Tabla 25 Elaboración de la primera rutina respecto al sistema teórico a elaborar en el curso

Mientras que la segunda rutina surge después de que el profesor explicita la primera rutina respecto a la demostración de teoremas, como se muestra en la primera parte de la Tabla 17 [b]. Allí, el profesor a partir de tres acciones ayuda a comprender que el sistema teórico, conformado por tres elementos es primordial para la demostración del enunciado del teorema [R-P.2.1]. Empieza preguntando por los elementos que se tienen hasta el momento del sistema teórico, luego pregunta por el postulado posible para iniciar con la demostración y por los postulados que se tienen hasta el momento. Cuando una estudiante responde que se tiene el postulado de existencia, el profesor pregunta por el enunciado de tal postulado (Tabla 26).

	R2. El sistema teórico está conformado por postulados, definiciones y teoremas, cada uno corresponde a un enunciado con un nombre en particular
Sistema teórico que hace referencia	Pide ejecutar acciones que concretan una rutina en su proceso relacionado con la producción de teoremas [R-P.2.1]
Cualquier elemento del sistema teórico	Profesor: *[…] ¿listo? ¿Qué tenemos hasta ahora de nuestro sistema teórico?*
Postulados del sistema teórico	Paola: *Tenemos un postulado* Profesor: *Un postulado ¿cierto? ¿Cuáles de los postulados? ¿Te acuerdas de los postulados que estábamos ahorita mencionando?*
Postulado existencia	Paola: *Existencia* Profesor: *Había uno que era de la existencia ¿Qué decía la existencia?*

Tabla 26 Correspondencia del sistema teórico con la segunda rutina con sus respectivas acciones

Ahora, de las dos acciones del profesor relacionado con narrativas, se evidencia dos narrativas específicas: Por una parte, el profesor presenta una relación entre cada una de las construcciones propuestas por los estudiantes a una tarea específica, en este caso *Construir una recta en GeoGebra* (Ilustración 3), con la elaboración de un elemento del sistema teórico:

> N1. Las construcciones realizadas pueden convertirse en proposiciones y por ende ser incluidas en el sistema teórico

Por otra parte, el profesor elabora una narrativa en torno a que los estudiantes enuncien completamente uno de los elementos del sistema teórico al momento de elaborar el primer argumento para la demostración del Teorema recta-punto:

> N2. El postulado existencia enuncia no solo que las rectas existen, sino también los puntos y los planos.

La Tabla 27 muestra la acción para promover el discurso mediante narrativas durante las dos narrativas generales encontradas.

N1. Las construcciones realizadas pueden convertirse en proposiciones y por ende ser incluidas en el sistema teórico	**N2.** El postulado existencia enuncia no solo que las rectas existen, sino también los puntos y los planos.
Pide establecer el estatus epistémico de una proposición en un sistema teórico [N-P.1.1]	Solicita explicitar un paso de un problema o de una cadena de argumentos [N-P.2.2]
Profesor: *[…] ¿Qué podríamos incluir de esas construcciones a nuestro sistema teórico?*	Profesor: *¿Si podríamos arrancar por el postulado de la existencia? Entonces decimos, bueno: ¿existe la recta m? sí, ¿por qué? Porque tenemos un postulado donde dice que existen las rectas,* ***¿qué más existe?***

Tabla 27 Acciones correspondientes a las narrativas respecto al sistema teórico

Finalmente, las cuatro acciones respecto a vocabulario están inmersas cuando el profesor introduce la palabra "teorema" y elabora el enunciado del Teorema recta-punto. Ellas se dividen en dos objetivos que el profesor presenta como se muestra en la Tabla 28: por una parte, hace recordar el uso del término apropiado para aludir a las rectas y a los puntos y por otra parte enuncia la notación (abreviación) para nombrar algún elemento del sistema teórico:

V1. Uso del término apropiado para aludir a las rectas y a los puntos		**V2.** Notación para nombrar algún elemento del sistema teórico	
Objeto matemático	Término especializado	Objeto Matemático	Término especializado
Puntos Rectas	Letras en mayúscula Letras en minúsculas	Teoremas Definiciones Postulados	T. D. P.

Tabla 28 Términos especializados de los dos vocabularios generales al elaborar el sistema teórico del curso

Respecto al primer uso del término apropiado para las rectas y puntos, se evidencian dos acciones del profesor: En primera instancia el profesor pregunta por la notación de aquellos objetos matemáticos, puesto que hacían parte de uno de los enunciados del sistema teórico (Postulado existencia) [V-P.2.3]. En otra ocasión, el profesor es quien enuncia y recuerda el uso de las letras minúsculas para las rectas, y poder escribir de forma adecuada el enunciado otro elemento del sistema teórico (Teorema recta-punto) [V-A.2.1].

Respecto al segundo uso del término para nombrar algún elemento del sistema teórico, se evidencian otras dos acciones del profesor, en esta ocasión surgen seguidas. Así, el profesor enuncia la notación que se va a llevar cuando se vaya a nombrar tanto un postulado, una definición o un teorema [V-A.2.1] para poder escribir en el tablero el primer teorema con el vocabulario institucionalizado anteriormente y poder escribir en el tablero el nombre del teorema de la siguiente forma: *T. Recta-punto* [V-A.2.5]. La Tabla 29 muestra en conclusión cómo cada una de las acciones respecto a vocabulario colabora con el desarrollo del discurso en relación con el sistema teórico en uso:

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">Elemento del sistema teórico que hace referencia</th></tr>
<tr><td>Vocabulario asociado</td><td>Postulado existencia</td><td colspan="2">Teorema recta-punto</td></tr>
<tr><td>V1</td><td>(Introduce el Postulado existencia).
Profesor: ¿Cómo era la notación de cada uno (rectas y puntos)? Para los puntos ¿qué utilizábamos? [V-P.2.3]</td><td colspan="2">(Escribe el nombre del teorema en el tablero).
Profesor: Acuérdense que cuando utilizamos la minúscula, nosotros aludimos al nombre de la recta [V-A.2.1]</td></tr>
<tr><td>V2</td><td></td><td>Profesor: […] Vamos a llevar una notación, […] cuando hablemos de teoremas, la T.</td><td>Profesor: Y nuestro primer teorema se llama recta-punto.
Acuérdenme, ¿cómo era la escritura?</td></tr>
</table>

Tabla 29. Correspondencia entre dos elementos del sistema teórico con las acciones de vocabulario

Con cada uno de los análisis realizados utilizando la herramienta analística en busca de cumplir con los objetivos del trabajo de grado, finalmente, se realizan algunas conclusiones generales y especificas en el último capítulo que se mostrara adelante.

Capítulo 5. CONCLUSIONES

A continuación, se presentan las conclusiones que se derivan del trabajo realizado. Estas están organizadas en torno a los cuatro objetivos específicos planteados en la delimitación del problema. Así, se hace énfasis en la pertinencia de la fundamentación teórica referente al discurso matemático y la producción de teoremas para la elaboración del estudio; se establecen los criterios que ayudaron a determinar los fragmentos de las transcripciones que se pretendían analizar; se contrasta las acciones elaboradas en la herramienta analítica con las acciones que empleó un profesor de grado octavo para favorecer cambios en el discurso respecto a la producción de teoremas; y, se mencionan las acciones principales que realiza el profesor para involucrar a sus estudiantes en la producción de teoremas.

En cuanto al primer objetivo, se infiere que la caracterización de teorema propuesta por Mariotti (1997), junto con el trabajo realizado por Molina, Luque y Robayo (2014), permitió construir una herramienta analítica en relación con los elementos involucrados en la producción de un teorema; y describir las acciones del profesor analizado en relación con los tres elementos que conforman un teorema (enunciado, demostración y teoría). Adicionalmente, los cuatros rasgos del discurso matemático manifestados por Morgan y Sfard (2016), junto con el conjunto de acciones del profesor correspondientes a cada componente, construidos por el grupo de investigación $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$, permitió en primera instancia elaborar una tabla de acciones que puede realizar un profesor de geometría en clase tendientes a producir un teorema en el curso, por cada componente del discurso matemático: vocabulario y sintaxis, mediadores visuales, narrativas y rutinas.

Respecto a la división de las transcripciones realizadas, se mostraron nueve fragmentos en total, cada uno con subtítulos específicos en el que incluían diferentes partes de las transcripciones; cinco enmarcados en la producción del Teorema recta-puntos, dos en la producción del Teorema punto-rectas y dos en la producción del Teorema punto al lado-punto medio. Aquellos fragmentos se hacen visibles en el cuarto capítulo, referente al análisis, incluyendo la relación que hay entre ellos en la síntesis de resultados. Los fragmentos analizados permitieron recoger una información amplia respecto a las acciones del profesor tendientes a generar cambios en el discurso de los estudiantes respecto a la formulación del enunciado de un teorema, contrario a lo que sucede con los fragmentos relacionados con la demostración de este, pues las acciones que realiza el profesor para este caso se evidencian en los dos primeros teoremas, aún más en el Teorema recta-punto. Así, es posible pensar que en un futuro el análisis se centre en el segundo rasgo de la producción de teoremas (Mariotti, 1997) que el profesor de octavo lleva a cabo durante cada una de las demostraciones de los teoremas, apoyado en: la división de transcripciones que falta por fragmentar; el marco teórico y diseño metodológico escrito en el documento presentado. Además, respecto al sistema teórico el cual se enmarcan los teoremas, se evidencian acciones del profesor solo en los primeros fragmentos, concluyendo así que el profesor se encarga de que los estudiantes comprendan el proceso que permite producir un conjunto de afirmaciones para la validación del enunciado del teorema teniendo como soporte un marco teórico de referencia, únicamente durante el primer día de clase, utilizando muy pocas acciones explicitas y por tanto, durante las demostraciones surgen algunas confusiones por parte de los estudiantes. Aquellas dificultades se mostraron en el análisis realizado y se hablará más adelante en las conclusiones del cuarto objetivo específico del estudio.

La herramienta analítica fue desarrollada durante un largo periodo de tiempo. En primera instancia, las acciones específicas para desarrollar cambios en el discurso asociados a la construcción de teoremas fueron elaboradas según el marco teórico de referencia. Sin embargo, al intentar analizar los fragmentos, se evidencia que aquellas acciones no son suficientes para categorizar las expresiones del profesor. Por tal razón, es posible pensar que la herramienta analítica presentada no esté del todo completa, puesto que probablemente hace falta elaborar más acciones del profesor por cada categoría. Aquello se podría corroborar, analizando fragmentos correspondientes a la construcción de teoremas que realicen otros profesores en distintas clases de colegio, o incluso en alguna universidad, teniendo como base la herramienta analítica elaborada en el trabajo de grado presentado.

Al finalizar la construcción de la herramienta analítica, se contó con veintiséis acciones respecto a vocabulario, nueve respecto a mediadores visuales, veintiocho respecto a narrativas y trece respecto a rutinas. Al compararla con la cantidad de acciones utilizadas por el profesor en las clases de geometría analizadas (Ilustración 6), se evidencia que varias de las acciones presupuestadas no hicieron parte de la actuación del profesor.

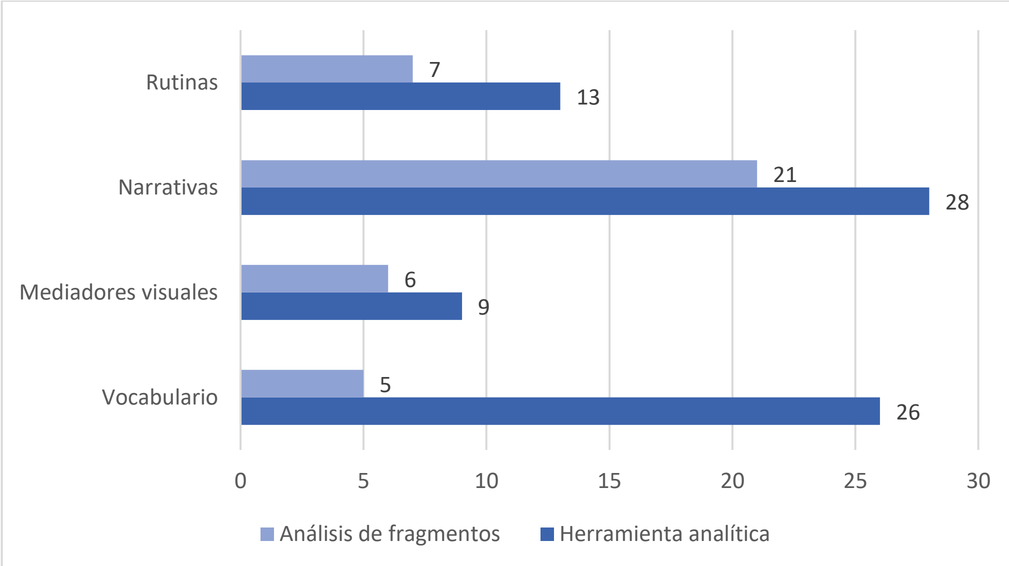


Ilustración 6 Acciones propuestas en la herramienta analítica vs. acciones evidenciadas en el análisis de los fragmentos

Respecto a la identificación de acciones realizadas por el profesor para favorecer cambios en el discurso asociados a la producción de teoremas, se evidenciaron secuencias de acciones del profesor análogas en la producción de los teoremas. El análisis realizado, muestra que el profesor, para elaborar el enunciado de un teorema: 1) el profesor propone un problema de tal forma que los enunciados de los teoremas corresponden a una proposición condicional que emerge como respuesta a un problema que él formula para que los estudiantes lo resuelvan con geometría dinámica; 2) el profesor promueve o pide que los estudiantes relacionen pasos de la construcción realizada en geometría dinámica con el antecedente y consecuente de la proposición que corresponde al enunciado del teorema; 3) El profesor institucionaliza que un teorema se formula de forma condicional y, recuerda y pide usar la rutina en varias ocasiones.

El análisis también mostró que las acciones del profesor para formular la demostración del teorema, están enmarcadas en: 1) promover que los estudiantes den sus respectivas opiniones o propongan los datos, la garantía o aserción de un argumento que hace parte de alguna propuesta de demostración; 2) explicitar una norma sociomatemática (propia del curso) según la cual el antecedente del teorema se asume como válido; 3) promover el uso de elementos del sistema teórico para formular una demostración.

El desarrollo del trabajo de grado me ayudó a comprender por una parte que no es lo mismo dictar una clase a analizar la misma. Pues uno en la segunda opción mira con detalle cada error que se comete en la clase con los estudiantes. Además, me mostró que para poder desarrollar un discurso la preparación de la clase se debe hacer con cada detalle y uno se debe preguntar a si mismo cuáles preguntas podrían decir los estudiantes para poder responder de la mejor forma posible sin que haya confusiones. Finalmente, considero que sí es posible desarrollar un sistema teórico local con estudiantes en colegios, pues son bastantes abiertos y aparte, considero que es bastante importante para que los estudiantes tengan un mejor razonamiento, sin embargo, hay que tratar de no cometer tantos errores en la clase y dejar que el profesor se convierta en un guía para ellos más aún luego de ir transcurriendo el tiempo para que ellos vayan construyendo la idea de lo que es un teorema.

Referencias

Anthony, G. y Walshaw, M. (2009). *Characteristics of effective teaching of mathematics: A view from the West.* Journal of Mathematics Education. 2(2). 147-164.

Ávila, A. (2018). *Lenguas indígenas y enseñanza de las matemáticas: la importancia de armonizar los términos*. Revista Colombiana de Educación, (74). 177-195.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M. Pinto, & T. Kawasaky (Ed.), Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics.

Morgan, C & Tang, S (2016) *To what extent are students expected to participate in specialised mathematical discourse? Change over time in school mathematics in England.* Research in Mathematics Education. 18(2). 142-164. DOI: 10.1080/14794802.2016.1174145.

Clarke, D., Xu, L. H. y Wan, M. E. V. (2013b). *Students speaking mathematics: Practices and consequences for mathematics classrooms in different countries.* Student voice in mathematics classrooms around the world. 33-52. Rotterdam: Sense Publishers

Conner, A. Singletary, L. Smith, R. Wagmer, P. & Francisco, R. (2014). *Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students engagement in mathematical activities*. Department of Natural Sciences and Mathematics. University of Georgia. 86. 401-429. Doi: 10.1007/s10649-014-9532-8.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2a ed.) (M. Vega, Ed.). Cali: Universidad del Valle.

Echeverry, A., Molina, Ó., Samper, C., Perry, P., & Camargo, L. (2012). Proposición condicional: interpretación y uso por parte de profesores de matemáticas en formación enseñanza de las ciencias. Enseñanza de la Ciencias. 30(1). 73-88.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. 35 (4). 258-291. Journal for Research in Mathematics Education.

Kaur, B. (2013). *Participation of students in content-learning classroom discourse: a study of two grade 8 mathematics classes in Singapore.* En B. Kaur, G. Anthony, M. Othani y D. Clarke.

(Eds). Student voice in mathematics classrooms around the world. 65-88. Rotterdam: Sense Publishers.

Krummheuer, G. (2007). *Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions*. Journal of Mathematical Behavior. 26(1) 60–82. Doi: 10.1016/j.jmathb.2007. 02.001.

Lesh, R. y Kelly, A. (2000). Multitiered teaching experiments. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.) Handbook of research design in mathematics and science education. 197-230. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mariotti, A. (2006). *Proof and proving in mathematics*. En A. Gutierrez y P. Boero (eds.),Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future(pp. 173-204).Genova: Sensepublishers.

Mariotti, M., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. En E. Pehkonen, Proceedings of the 21st Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education. 180-195.

Mariotti, M. A. (1997). Justifying and proving in geometry: The mediation of a microworld. En M. Hejny y J. Novotna (Eds.), Proceedings of the European Conference on Mathematical Education. 21-26. Prague: Prometheus Publishing House.

Mar, T., Soucy, S., Wallace, M. & Dindyal, J. (2005). *The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof.* En: Educational Studies in Mathematics. 60(1). 95–124.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Bogotá. Serie Lineamientos.

Molina, O. (2019). Sistemas de normas que favorecen la producción de argumentos: un curso de Geometría del Espacio como escenario de investigación. Tesis de Doctorado. Osorno, Chile: Universidad de Los Lagos. Obtenido de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_OMolina.pdf

Molina, O. Luque, C. & Robayo A. (2014). Producción de teoremas con estudiantes en extraedad: la justificación de una conjetura. 39-61. Tecné, Episteme y Didaxis: TED

Molina, O., & Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. Bolema: Boletim de Educação Matemática. 33(1). 63.

Morgan, C. & Sfard, A. (2016). Investigating changes in high-stakes mathematics examinations: a discursive approach. Research in Mathematics Education. 18(2). 92-119. DOI: 10.1080/14794802.2016.1176596.

Morgan, C. (2005). *Words, definitions and concepts in discourses of mathematics, teaching and learning*. Language and Education. 19(2). 102–116.

Ospina, Y., Samper, C. & Plazas, T. (2013). Acciones del profesor que promueven actividad demostrativa con estudiantes de sexto grado. Educación científica y tecnológica. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, D. C.

Perry, P., Camargo, L., Molina, Ó. y Samper, C. (2019). Voces de estudiantes en clase de geometría y su potencial para desarrollar el discurso en el aula. Proyecto de investigación. Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Camargo, L., Vargas, C. Molina, Ó. y Samper, C. (2020). Gestión de voces de los estudiantes en clase de geometría. Proyecto de investigación. Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. y Barwell, R. (2016). Language in mathematics education research. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues. 275-313. Rotterdam: Sense Publishers.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2008a). Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional (P. Perry y L. Andrade, eds. y trads.). Cali: Universidad del Valle.

Sfard, A. (2008c). Aprender matemáticas como la acción de desarrollar un discurso. En Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional (pp. 39-63). Cali: Universidad del Valle.

Sfard, A. (2008). Sobre las metáforas de la adquisición y de la participación para el aprendizaje de las matemáticas. En A. Sfard, Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional (P. Perry y L. Andrade, eds. y trads.) (pp. 23-37). Cali: Universidad del Valle.

Sfard, A. (2013). *Not just so stories: Practicing discursive research for the benefit of educational practice*. In V. Farnsworth & Y. Solomon (Eds.), What works in education? Bridging theory and practice in research. 139–150. London: Routledge.

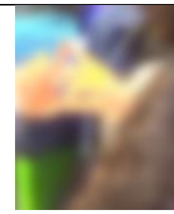
Stylianides, A. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom.* Oxford University Press. United States of America. CPI Group Ltd, Croydon. ISBN 978-0-19-872306-6

Vygotsky, L. S. (1930). Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas. México: Ediciones Quinto Sol.

Anexos

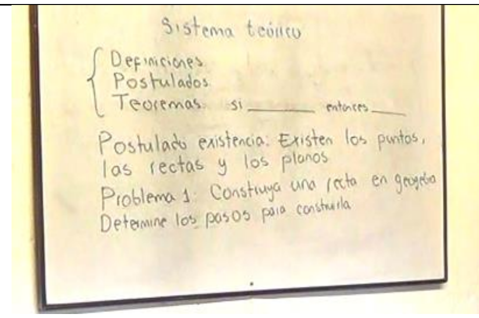
Anexo A. Transcripción de la puesta en común del Teorema recta-punto.

1.	Profesor:	Buenos días.
2.	Todos:	Buenos días profe.
3.	Profesor:	El anterior trimestre estuvimos haciendo un repaso de algunos temas que ustedes trabajaron en geometría. En este trimestre vamos a tratar de construir un sistema teórico, el sistema teórico del curso 804. Para ello, vamos a tener tres importantes reglas de juego y son las siguientes (…) por favor anoten en el cuaderno. (… … …) Nosotros hemos venido trabajando las definiciones ¿cierto? ¿Qué definiciones estábamos repasando? (…) ¿Alguien me puede decir?
4.	Paola:	Ángulos adyacentes, par lineal.
5.	Profesor:	Listo, ¿otras?
6.	Daniela:	Bisectrices.
7.	Profesor:	Bisectriz vimos ¿Qué más?
8.	Paola:	Mediatriz.
9.	Profesor:	Vimos muchas definiciones como manera de repaso (Escribe en el tablero "definiciones"). Nuevamente, las vamos a volver a retomar cuando de pronto las necesitemos. (…) También vamos a hablar de algo llamado postulado (Escribe en el tablero "Postulado") ¿Alguna vez han escuchado esa palabra?
10.	Daniela:	(Levanta la mano).
11.	Profesor:	(Señalándola) Dime.
12.	Daniela:	Era como el postulado lado, lado, lado creo
13.	Paola:	¡Ah! ¡Sí! Es algo que se puede comprobar.
14.	Profesor:	¿Y eso dónde lo vieron? ¿Cuándo ustedes vieron lado, lado, lado?
15.	Paola:	Triángulos.
16.	Profesor:	Para ver triángulos congruentes. Listo. Ahora vamos a ver otros postulados, de pronto vamos a repasar el de los triángulos, pero requiere cierto tiempo. Y otro [término] que va a ser los teoremas. (Escribe "teoremas" en el tablero") ¿Ustedes han escuchado eso?

17.	Daniela:	El de Pitágoras.
18.	Profesor:	¿Sí? ¿Te acuerdas qué decía ese teorema?
19.	Daniela:	Pues, tengo un triángulo y la medida de los catetos es la medida más grande, algo así. (Representa un triángulo con los dedos). 
(Pocos estudiantes le ponen atención por estar copiando lo que el profesor escribió en el tablero. Mientras ella interviene Lucas alza la mano).		
20.	Profesor:	O sea, tiene que estar relacionado con la medida de los lados ¿cierto? (Mira a Lucas) ¿Señor?
21.	Lucas:	(Haciendo figuras con el esfero y las manos forma un triángulo, donde el espero representa la hipotenusa). Vimos que en el triángulo nos daban dos catetos y teníamos que hallar la medida del lado que estaba así (Señala el esfero).
22.	Profesor:	Y ese se puede para cualquier triángulo?
23.	Lucas:	Emmm ¿No?
24.	Profesor:	Bueno, ahorita no vamos a habar de ese teorema, pero si vamos a construir algunos [teoremas] ¿Listo? Estos teoremas son afirmaciones que uno realiza y casi siempre viene [escrito] de la siguiente manera: si algo pasa, entonces yo concluyo algo. Por ejemplo, como decía Lucas del Teorema de Pitágoras y ese tenía que ver con un triángulo rectángulo.
25.	Lucas:	(Hace una afirmación con la cabeza y murmulla dirigiéndose a Alex) ¡Ah sí!
26.	Profesor:	entonces por ejemplo si yo tengo un triángulo rectángulo, voy a tener, entonces una relación con sus lados que ahorita no me interesa, pero siempre vamos a tener este tipo de proposiciones (Señala lo escrito en el tablero).  Bien, entonces vamos a arrancar con los postulados, que son las afirmaciones que aceptamos como verdaderas y para ello siempre vamos a decir: ¡Ah bueno! Por el postulado se va a cumplir ¿listo? El postulado con el que vamos a empezar se llama (…) Postulado existencia. (Escribe el nombre del postulado en el tablero y los estudiantes lo copian en silencio con algunos murmullos aislados) ¿Se acuerdan cuando iniciamos? La primera clase hablabamos de algo que no se

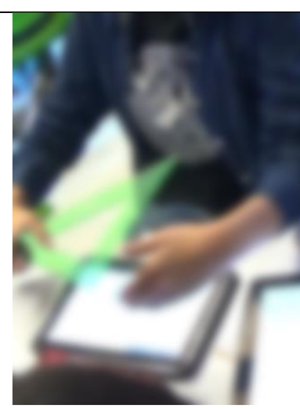
		definía. ¿Qué eran esas cosas que no se definían? ¿Alguno se acuerda?
27.	Paola:	La recta.
28.	Profesor:	¿Cierto? ¿Qué más no se definía? Los puntos.
29.	Paola	El plano.
30.	Profesor:	Y los planos ¿Cierto? (Anota el enunciado del primer postulado en el tablero)(… … …).
(Los estudiantes copian en el cuaderno lo que el profesro escribe en el tablero).		
31.	Profesor:	Entonces el postulado de la existencia me dice que existe lo que ustedes me acaban de mencionar ¿Listo?
		(Se escuchan voces mientrar el profesor termina de escribir en el tablero).
32.	Profesor:	Y ya sabemos entonces ¿cómo era también la notación de cada uno cierto? Para los puntos ¿qué utilizabamos?
(Mientras la mayoría del curso anota lo dicho por el profesor y lo que él está copiando en el tablero, María no lo esta haciendo, sino le está poniendo atención a las preguntas que hace el profesor y levanta la mano).		
33.	María:	Una letra en mayúscula.
34.	Profesor:	¿Cierto? ¿Para las rectas?
35.	María:	Una letra, pero en minúscula.
36.	Profesor:	¡Ah! Ok ¿Y para los planos?
37.	Daniela:	Letras griegas.
38.	Profesor:	También nosotros lo sabemos dibujar. Bien, teniendo en cuenta esto vamos a realiza el siguiente problema en le que utilizaremos las tablets.
(Mientras los estudiantes van por las tablets, el profesor copia el problema #1 en el tablero).		

Problema 1: Construya una recta en GeoGebra. Determine los pasos para construirla.	

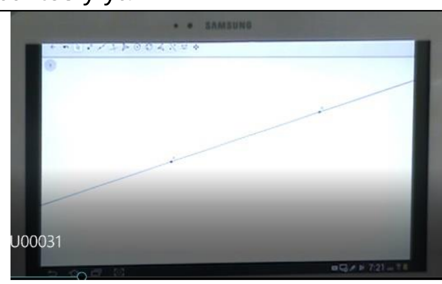
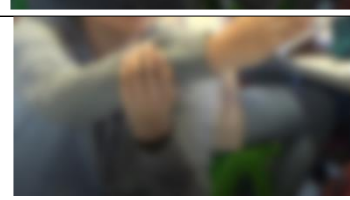
El profesor da tiempo para que los estudiantes exploren en GeoGebra y resuelvan el problema. Pasa por los puestos para ver qué han hecho.

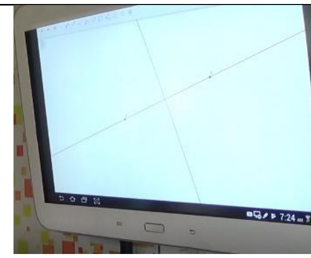
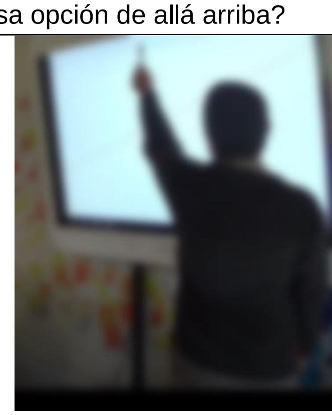
Grupo de Daniela:

39.	Daniela:	(Llama al profesor) ¿Qué hay que hacer?	
40.	Profesor:	¿Qué hay que hacer qué de la actividad? Recuerden quitar los ejes por cada construcción ¿Cómo la construirían?	
41.	Daniela:	Dibujar una recta y determinar los pasos.	
42.	Profesor:	Listo. ¿Cómo se hará? ¿Que hiciste para ello?	
43.	Daniela:	(Realiza dos puntos. Luego activa la opción Recta y va construyendo la recta mientras habla). Pues poner recta, un punto y otro punto y ya.	
44.	Profesor:	¿Listo? Entonces construye los pasos ¿Solo habrá esa forma de contruir la recta? (Se aleja del grupo).	
45.	Sofía:	Primero podría hacer la linea (…) (Llama nuevamente al profesor) ¿Si es lo que yo dije? ¿Escribo eso?	
46.	Daniela:	Pero mi forma es (…) O sea, poner los dos puntos y luego hacer la línea. (Usa una escuadra para representar una recta pasando por dos puntos que ha hecho en GeoGebra).	
47.	Sofía:	En GeoGebra no se puede o ¿sí?	

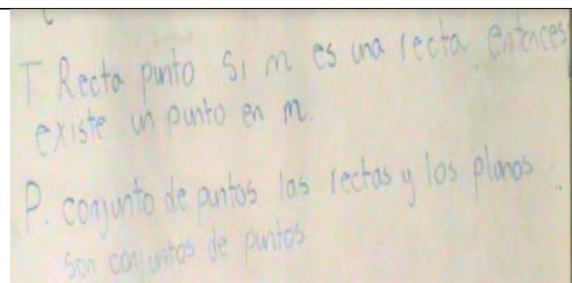
48.	Profesor:	¿No se podría? Intentalo y luego me comentas.

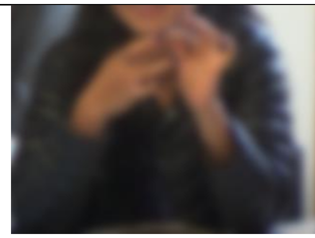
Interacción en gran grupo.

(El profesor le da la tablet que proyecta al televisor a Karen para que ella realice lo que le indican y promueve un diálogo entre todos sobre las soluciones).		
49.	Profesor:	Entonces Julián, dinos cómo solucionaste el problema. Vas a darle las instrucciones a Karen.
50.	Julián:	Seleccionar la herramienta de Recta.
(Se escuchan murmullos)		
51.	Profesor:	Bueno, vamos a escuchar. Listo. Seleccionaste la herramienta de recta.
52.	Julián:	En el plano pones dos puntos y ya.
53.	Karen:	
54.	Profesor:	Entonces, una vez yo pongo a un punto, tengo que poner otro y aparece la recta ¿Cierto? Esa es una opción. Listo (…) Bien ¿Otra opción cual sería? Lucas, ¿habrá otra opción aparte de la que dijo su compañero? [El profesor había visto lo hecho por Lucas].
55.	Lucas:	Digamos, tú tienes un segmento y le sacas la mediatriz. Entonces la mediatriz sería una recta. (Representa un segmento con el dedo y la mediatriz de este).
56.	Coro:	¡Ush! (Reacción de asombro).
57.	Profesor:	Pues miremos a ver. ¿Le puedes volver a repetir la construcción a Karen?
58.	Lucas:	Sí, mira. Tú tienes un segmento (…) 
		Y cuando le sacas la mediatriz a ese segmento sería una recta. Y ya. 

59.	Karen:	(Sigue las instrucciones de Lucas) 
60.	Profesor:	Pero bueno, acuérdense que estamos construyendo un sistema teórico. Pero miren lo que dice allá (señala el tablero), hasta ahora, ¿qué es lo que tenemos?
(Algunos miran en el cuaderno y otros miran en el tablero).		
61.	Profesor:	¿Hemos nombrado los segmentos por ahora? Como estamos haciendo hasta ahora una construcción del sistema, entonces no podemos hablar de segmentos. [No parece verlos muy convencidos con la respuesta que dio]. ¿Cómo hicieron eso? (Señalando la construcción de la mediatriz en GeoGebra). Digo, lo hemos trabajado en algún momento, pero como estamos haciendo una construcción [de un sistema teórico], por ahora no podríamos de hablar de segmentos, solo tenemos las rectas.
62.	Manuel:	Pero también se puede con una recta (señala la construcción que Karen hizo).
63.	Profesor:	Entonces, ¿hemos hablado de la mediatriz? ¿Qué es? [Murmullos].
64.	Paola:	Es una recta paralela que pasa por el punto medio de un segmento.
65.	Lucas:	¿Paralela?
66.	Daniela:	Pero no es paralela.
67.	Lucas:	Las paralelas son así
68.	Paola:	Entonces perpendicular.
69.	Profesor:	¡Ah! Bueno. Pero yo les estoy diciendo que la estamos construyendo, así que por ahora no vamos a habla de rectas perpendiculares, mediatriz, punto medio. Eso se va a ver en su momento. (…) Bueno, entonces yo vi una construcción de Mariana que era diferente a como la construyó Julián.
70.	Karen:	(Le da la tablet a Mariana para que realice la construcción).
71.	Mariana:	¿La hago?
72.	Profesor:	Sí, por favor. ¿Sabes que podrías hacer? Borrar esa construcción que Karen hizo de la perpendicular porque no la vamos a usar. ¿Si ves esa opción de allá arriba? (Señala la opción “mover” con el marcador)  La seleccionas para correr la construcción un poco y te quede el espacio suficiente para realizar tu construcción (Mariana mueve la pantalla hasta quedar completamente espejada). Listo, déjala ahí. Ahora sí, podrías decirnos entonces qué hiciste.

73.	Mariana:	Primero construí los dos puntos, luego use la opción recta y los volví a señalar.
74.	Profesor:	Y esa sería una construcción. Ya tenemos dos construcciones. La primera consiste en ir a la opción recta y seleccionar entonces en el plano dos puntos y automáticamente salen y la segunda que se hacen dos puntos y luego, se va a la opción para seleccionando los puntos antes construidos. ¿Habrá otra manera? No sé si una persona encontró otra manera de construirla. (Murmullos, Karen dice, con dos rayos)(… … …) Emmm Michael hizo una, ¿nos la podrías mostrar por favor? (Le pasan la Tablet a Michael).
75.	Michael:	Escoger la opción de mano alzada y hacer muchos puntos.
76.	Profesor:	Por qué se te ocurrió hacer eso.
77.	Michael:	Porque me pareció fácil.
78.	Profesor:	Pero el comando.
79.	Michael:	Explorando, como si la fuera a construir en el papel.
80.	Profesor:	(La mesa de Lucas querían intentar hacer la construcción, pero las indicaciones no fueron escuchadas claramente) ¿Podrías volverla a repetir que acá quieren hacerla? ¿Ya todos la intentaron hacer? Porque cuando hemos trabajado con las tablets nunca habíamos visto esa opción.
81.	Michael:	En la flechita aparece la opción.
82.	Profesor:	Entonces vamos a revisar esas tres construcciones que ustedes hicieron. ¿Qué podríamos incluir de esas construcciones a nuestro sistema teórico? [Le pide el favor a Michael que borre las construcciones hechas anteriormente en GGB]. La primera era ir a la opción recta ¿cierto? A ver, ve a la opción recta y ahora uno que hace [Michael hace click dos veces en la pantalla]. Ah tu seleccionaste dos puntos y de una vez apareció ¿cierto? Eso quiere decir que vamos a mirar nuestro primer teorema y es el siguiente ¿Por qué? Porque de una vez que usted seleccionó la recta, apareció un punto, volvió a seleccionar en otro lado y apareció otro punto y la recta. Así, ¿por ahora podríamos decir que las rectas cuantos puntos tendrían?
83.	Coro:	Dos.
84.	Profesor:	¿Cierto? o sea, dos puntos tendría lo mínimo. Listo, vamos a llevar una notación, cuando hablemos de definiciones, vamos a utilizar la letra D. Cuando hablemos de postulados vamos a utilizar la P. Cuando hablemos de teoremas, la T. Y nuestro primer teorema se llama recta-punto. Acuérdenme ¿cómo era la escritura?
85.	María y otros:	Con la T.
86.	Profesor:	Bueno con la T ¿cierto? Y también si algo pasa.
87.	Paola:	Entonces eso pasa.
88.	Profesor:	Listo, muy bien (…) [Escribe el nombre teorema en el tablero, deja de escribir y mira a los estudiantes]. Acuérdense que cuando utilizamos la minúscula, nosotros aludimos al nombre de la reta ¿cierto? Entonces si m es una recta (mientras lo escribe en el tablero y los demás copian), entonces existe un punto. Yo sé que con lo que hemos hecho hasta ahora, en el software, necesitábamos dos puntos, pero para ello necesitábamos primero un punto, entonces vamos a mirar si eso es cierto o no (Termina de escribir en el tablero). Bien, yo quisiera (…) Ya terminaron de copiar ¿verdad?
89.	Varios:	¡No!

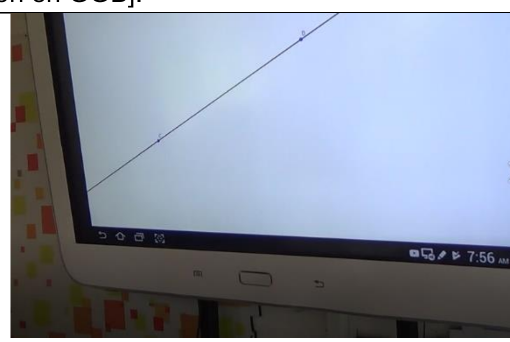
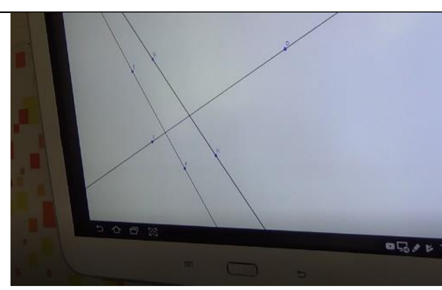
90.	Profesor:	Bueno (… … …) Listo, entonces hasta ahora tendríamos… Miren cuando tenemos un teorema y podemos decir algunas cosas que tenemos de nuestro sistema teórico que nos permitan validarlo ¿listo? (…) ¿Qué tenemos hasta ahora de nuestro sistema teórico?
91.	Paola:	Tenemos un postulado.
92.	Profesor:	Un postulado ¿cierto? ¿Cuáles de los postulados? ¿Te acuerdas de los postulados que estábamos ahorita mencionando? [Señalando con el marcador a Alejandro].
93.	Alejandro:	No.
94.	Camila:	Postulado lado, lado, lado.
95.	Profesor:	Ah bueno, pero recuerda que esos son lo de los triángulos ¿cierto? Pero ahorita, cuando empezamos la clase, empezamos con dos postulados. ¿Cuáles eran María José?
[Mira el cuaderno, sin embargo, Paola la interrumpa].		
96.	Paola:	Existencia.
97.	Profesor:	Había uno que era de la existencia (…) ¿Qué decía la existencia?
98.	Paola:	Existe el punto, la recta y el plano.
99.	Profesor:	El punto, la recta y los planos ¿cierto? ¿Y el otro? ¿Había otro postulado o no?
100.	Coro:	No.
101.	Profesor:	¡Ah! (…) Es que se me olvidó, porque sin ese postulado no podemos decir nada de esto, por favor vamos a escribirlo y es el siguiente: Me dice que las rectas y los planos son conjuntos de puntos y se llama conjuntos de puntos. (… … …) (Lo escribe en el tablero).
		
102.	Profesor:	Y ahora, yo quiera saber si este teorema lo podríamos validar con respecto a los dos postulados que tenemos (…) Tú qué dices, cómo podíamos hacerlo (Mirando fijamente a María del Mar) (… … …) [Se siente incómoda y sonríe como si estuviera nerviosa] María del Mar, a ver. Inténtalo.
103.	María del mar	(Habla bastante bajito) Entonces hay que demostrar que la recta tiene (…) al menos un punto.
104.	Profesor:	Entonces, no sé si alcanzaron a escuchar lo que María del mar dijo.
105.	Varios:	No.
106.	Profesor:	¿No? Entonces habla un poquito más fuerte para que todos alcancemos a escuchar (Vuelve a hacer la misma sonrisa de pena) (…) ¡Dale! Cuéntanos tu idea de cómo podríamos validar este teorema.

		
107.	María del mar:	Que es el conjunto de puntos.
108.	Profesor:	Pero bueno, ustedes qué dirían de lo que acaba de decir María del Mar. Tú qué dirías (Mirando a Tania).
109.	Tania:	No escuché.
110.	Profesor:	¿¡No!? Y por el lado de allá (Mirando al otro lado del salón).
111.	Varios:	No.
112.	Profesor:	Entonces trata de hablar un poco más duro, pero también necesito que los demás escuchemos a lo que los compañeros dicen, entonces tengamos una actitud de escucha ¿listo? (…) A ver, entonces cuéntanos un poquito más y más fuerte tu idea.
113.	Maria del Mar:	Hay no [Con la misma risa nerviosa].
114.	Profesor:	No, dale que todos tenemos que escucharnos acá.
115.	Paola:	[Le dice prácticamente al oído] ¡Dígalo!
116.	María del mar:	Construir un punto en la recta (…)
117.	Paola:	Por el Teorema.
118.	María del mar:	Se puede construir (risas) que es un conjunto de puntos. No sé.
119.	Profesor:	Bueno, pero quisiera que ustedes hablen y logren de pronto debatir y mirar si están de acuerdo con la idea que su compañero dijo ¿sí? Porque haber, les voy a decir lo que yo le entiendo a María de Mar (…) Tú me debes decir si es cierto o no ¿listo? (…) Me dices que existe un punto y de ahí sale una recta ¿ustedes qué dirían?
120.	Paola:	¡No! Que hay un punto, o sea que el punto pertenece a la recta.
121.	Profesor:	¿Que el punto pertenece a la recta?
122.	Paola:	(Mirando al tablero) Sí, o sea al afirmar que existe un puntos en esa (la recta), podemos también decir que el conjunto de esos puntos es una recta por el postulado (Señalando al tablero).
123.	Profesor:	Qué diría Dana ¿Está de acuerdo? Creo que no nos estamos escuchando, por acá nos están dando unas ideas muy buenas, pero si ustedes no escuchan, entonces pues grave, porque no hacemos nada. Haber, nuevamente. Qué pena contigo, pero necesito que todos escuchen. Porque les voy a preguntar al azar si están de acuerdo o no. Porque entonces tienen que estar pendientes ¿listo?
124.	Paola:	Que en el teorema Recta – Punto, dice que hay un punto ¿sí? Y de ahí, ya podemos concluir que el conjunto de puntos forma la recta por el postulado.
125.	Profesor:	Bueno, qué dirían ustedes, si es cierto o no es cierto que diría que de aquí (Teorema) yo puedo sacar un punto. O sea, yo parto de un punto, ¿para todos es cierto que partimos de un punto?
126.	Varios:	Sí.

127.	Profesor:	¿Seguros? O alguien dice que no. Voy a borrar por ahora este postulado que se me olvidó mencionarlo [P. Conjunto de puntos].
128.	Paola:	Pero acá dice que hay una recta, que pasa por ese punto. O sea, yo tengo la recta y de esa recta aparece el punto.
129.	Profesor:	Bueno, pero ya es diferente de lo que dijeron. Entonces quiero que me digan, porque hay dos posturas: Una que parte del punto y otra que partimos de la recta. ¿Quiénes están en contra? ¿y a favor?. De dónde partimos, del punto o de la recta. ¿Qué diría Daniela? ¿Cuál tu dirías? Que se parte del punto, o de la recta. Vamos a tratar de validar este.
130.	Daniela:	Pues como vimos ahí, se puede empezar desde la recta o desde el punto.
131.	Profesor:	Sí, pero les voy a leer el teorema para que digan algo con respeto a los dos postulados. Die: Si m es una recta, entonces existe un punto en m. ¿Cierto? Y estábamos discutiendo si partíamos de la recta o el punto.
132.	María:	De la recta y luego por el punto.
133.	Profesor:	Y por qué no por el punto.
134.	Paola:	Porque estamos diciendo que la recta contiene al punto, más no que un punto contiene a la recta.
135.	Profesor:	Ustedes qué dicen. [Mariana alza la mano y responde sin que el profesor le dirija la palabra].
136.	Mariana:	Yo digo que parte del punto.
137.	Profesor:	¿Parte del punto? ¿Todos de acuerdo?
138.	Coro:	No. (Las amigas de la mesa se le burlan).
139.	Profesor:	Bueno y los que dijeron que no, me pueden decir por qué. A ver, tu dijiste que no Michael, ¿por qué no?
140.	Michael:	Porque puede partir de las rectas. O sea lo que me dice el teorema es que parte de la recta para llegar al punto.
141.	Profesor:	Porque es que yo llegué y dije miren: Si m es una recta, no dije si m es un punto. Entonces ¿de dónde partimos?
142.	Coro:	De la recta.
143.	Profesor:	¿Alguien todavía piensa que partimos del punto? Porque también podría ser. Si me dicen por qué sí. (Dana alza la mano) A ver, tú dices que partimos del punto.
144.	Dana:	Sí, porque la recta debe contener un punto, pues siempre que uno va a elegir la opción de recta, empieza con un punto. Porque o si no, simplemente trazaría la opción de recta y no **haría ningún punto**.
145.	Profesor:	Pero, pero qué. ¿Ibas a decir algo? (Mirando fijamente a Diana).
146.	Diana:	Pues no siempre se tiene que partir de un punto. Pues si hacemos la recta así como (Señalando el televisor) la recta sin punto.
147.	Profesor:	Ah. Es que los teoremas tienen algo en particular, resulta que después de que usted pone acá el sí (señalando el antecedente del teorema), es el objeto que tiene. Acá dice, si m es una recta, entonces tengo mi recta. ¿Qué necesito garantizar, que en esa recta por lo menos hallan cuantos puntos?
148.	Varios:	Uno.
149.	Profesor:	¿Uno cierto? Entonces, de acuerdo a los postulados, qué podríamos entonces, los podríamos utilizar acá o no. Ustedes qué dicen, qué dices por ejemplo tu (señalando a Stefany).
150.	Stefany:	Hay no.

151.	Profesor:	Tú que dirías, si lo podríamos utilizar o no.
152.	Stefany:	¿Qué?
153.	Profesor:	Los postulados. Listo, cuáles podríamos utilizar y por qué (…) Todos vamos a escuchar y vamos a decir si sí o si no. Dale.
154.	Stefany:	(Dice no con la cabeza).
155.	Profesor:	Dale, aunque sea una ideíta.
156.	Stefany:	No.
157.	Profesor:	Bueno, a ver Paola.
158.	Paola:	El de existencia, porque dice que el punto y la recta existen.
159.	Profesor:	¡Ah bueno! Qué dicen ustedes. ¿Sí, podríamos arrancar por el postulado de la existencia? Entonces decimos, bueno: ¿existe la recta m? sí, ¿por qué? Porque tenemos un postulado donde dice que existen las rectas, ¿qué más existe?
160.	Paola:	Puntos y planos.
161.	Profesor:	Listo, entonces ya tenemos que existe la recta, bien. Garantizamos la existencia de esta recta (recta m), entonces vamos a escribir que por el postulado ¿cómo era que lo llamábamos? ¿Existencia cierto? Existencia, existe la recta m (escribe en una esquina del tablero, debajo de donde se puso el enunciado del teorema "por P. Existencia, existe la recta m") Listo, y ¿qué más?, ya tenemos la existencia de la recta, ahora ¿qué tendría yo que garantizar? (… … …) [Los estudiantes están anotando en los cuadernos] Qué necesito yo?
162.	Paola:	El punto.
163.	Profesor:	El punto, entonces cómo podría garantizar que hay un punto ahí. Vamos a mirar cómo lo hicieron ¿listo? A ver (…)
164.	Laura:	Postulado conjuntos de puntos.
165.	Profesor:	¿Qué dices?
166.	Laura:	Postulado conjunto de puntos.
167.	Profesor:	Y por qué lo vas a usar.
168.	Laura:	Pues porque (risas)
169.	Paola:	¡Yo!
170.	Profesor:	Sí, espérame un momento, quiero escucharlos a algunos. (Empezó a alzar la mano, mientras el profesor le preguntaba a os otros compañeros) ¿Tú qué dirías? ¿Si podríamos usar ese postulado o no?
171.	David:	¡Claro!
172.	Profesor:	¿Por qué?
173.	David:	Pues porque (…)
174.	Profesor:	Existe la recta, ¿cierto? ¿Qué estábamos tratando de decir? (Paola sigue alzando la mano). Tú qué dices, Julián o Nicolás (… … …). Okey, listo, entonces Paola tiene una idea, a ver, cuéntanos.
175.	Paola:	Se podría decir que, o sea, poner el punto, porque el postulado conjunto de puntos dice que la recta es un conjunto de puntos.
176.	Profesor:	Sofía qué dice.
177.	Sofía:	No estoy de acuerdo, porque los puntos conforman la recta y necesitaría un punto externo para poner en la recta.
178.	Profesor:	O sea, tu necesitarías algo así (Dibuja en el tablero un punto en una recta).

179.	Sofia:	No, un punto que no pertenezca a la recta para hacerlo existir en la recta. No sé si me hago entender.
180.	Profesor:	Qué dicen ustedes, a ver vuélvelo a decir. La idea es que todos tus compañeros se escuchen y opinen.
181.	Sofia;	Por el postulado conjunto de puntos dice que la recta es un conjunto de puntos, pero si vamos a poner un punto en la recta, necesitáramos un punto que no forme pare de la recta para estar en la recta.
182.	Profesor:	O sea, necesitas un punto fuera de la recta.
183.	Sofia:	No un punto en la recta, sino que todavía no esté y luego se ponga dentro de la recta.
184.	Profesor:	¿Qué dicen ustedes?
185.	Paola:	El postulado dice que la recta está compuesta por muchos puntos, lo quiere decir que el punto está en la recta. No necesitamos ponerla fuera de la recta, porque por el postulado ya se sabe que está en la recta.
186.	Daniela:	Solo faltaría escoger un punto sobre la recta.
187.	Profesor:	Pero yo no veo a muchos tan convencidos, por ejemplo, a María ose no la veo tan convencida. Ustedes qué dicen, sí o no.
188.	Varios:	Sí.
189.	Profesor:	O cuál de las dos, porque son dos posturas diferentes. O de pronto sale una nueva, ¿Diego qué opina? (…) ¿Sí podríamos usar el postulado? (… … …) ¿Saben cuál es el problema? El problema es que no nos estamos escuchando, ustedes allá están hablando.
190.	Daniela:	Profe, podrías dibujar la idea en el tablero y así los que no entiendan , van a ver al tablero para entenderla.
191.	Profesor:	Miren, acá hay una idea (…) La idea de Paola es que usemos el postulado de existencia porque el postulado nos garantiza que la recta es un conjunto de puntos, eso nos garantiza que por lo menos debe haber uno. Y la idea de Sofía es, no, no lo podemos usar, lo que debemos hacer es que haya un punto, vamos a ver si la entendí, o si no tú me dices ¿listo? Que hay un punto externo y que ese punto externo (Sofía lo interrumpe).
192.	Sofía:	No.
193.	Profesor:	Bueno, en todo caso, me parece que hay una postura y hay que mirar por qué lado irnos y saber si aparece otra. Cuéntame tu idea otra vez (Le dice a Sofía) Pero todos la vamos a escuchar.
194.	Sofia:	Pues, con un ejemplo distinto.
195.	Profesor:	Listo, dale.
196.	Sofía:	Si tengo, no se (…) un cuaderno y el cuaderno esa lleno de puntos y necesito ponerle una raya al cuaderno, no voy a coger una raya que este en el cuaderno, sino la pongo en el cuaderno.
197.	Alex	Ah o sea, como construir la diagonal.
198.		Murmullos (Dana levanta la mano).
199.	Profesor:	A ver, tiene la palabra Dana y luego vienes tú para ver qué sale ¿listo?
200.	Dana:	Pue según yo le entendí, tenemos el cuaderno, pero ella no quiere que la recta haga parte del cuaderno, sino una recta externa que lo atraviese.
201.	Profesor:	¿Esa es tu idea? (Preguntándole a Sofía).
202.	Sofía:	Perdón, no la escuché (risas).
203.	Alex:	Es como si en el cuaderno trazaras una diagonal (mirando a Sofía).

204.	Paola:	Una recta que no está en el cuaderno, pero lo pone.
205.	Sofía:	Es como el salón, ya hay gente en el salón, pero quiero meter a alguien más en el salón. Meto a alguien externo al salón de clases. (Murmullos, todos hablan al tiempo).
206.	Profesor:	Bueno, entonces dices que no puedo obligar que un punto exista en la recta ¿Si?
207.	Sofía:	(Mira extraño al profesor) No.
208.	Profesor:	¿No? ¿No es esa la idea? Yo entonces ahí ya no entendí tu idea. Si quieres pasa al tablero a explicarla.
209.	Sofía:	¡Ay no!
210.	Profesor:	¿No? Bueno, vamos entonces por ahora a dejar ahí la discusión para poder avanzar un poco. Cada uno de ustedes ahorita me va a decir por qué idea se quieren ir, por la idea que tiene paola o sofía. ¿Quién se iría por la de paola?
		(Pocos alzan la mano)
211.	Profesor:	Y ¿los demás se irían con la de Sofía? Bueno, ahorita de pronto cuando hallamos avanzado, vamos a mirar por cuál de las dos podríamos optar ¿listo? Bien, para avanzar un poco, vamos a mirar la siguiente construcción. Maria Jose, ¿podrías decirla porfa? ¿Te acuerdas de la segunda construcción que se hizo? La que había hecho Mariana. Partimos diferente, de dos puntos y luego la opción recta [Mariana realiza la construcción en GGB].
		
		Mi pregunta ahora es: ¿Cuántas rectas pueden pasar por dos puntos?
212.	Varios:	Muchas, infinitas.
213.	Profesor:	¿Muchas?
214.	Mariana:	
215.	Profesor:	No, pero solo con los puntos C y D.
216.	Varios:	Ahhhh solamente una.
217.	Profesor:	Por acá tienen una idea.
218.	Dana:	No, pueden ser infinitas rectas.
219.	Varios:	¡Ash!

220.	Paola:	Pero que pasen por los dos puntos solamente.
221.	Profesor:	A ver, aver. Escuchemos a dana para saber cuál es la idea que tiene.
222.	Dana:	Pues es que en el plano hay infinitas rectas.
223.	Profesor:	Pero mira que en la construcción yo tengo el plano, y solo tengo los dos puntos, C y D. ¿Cuántas rectas pueden salir?
224.	Mariana:	No, solo deja poner una. No deja poner más, se necesitaría otro punto.
225.	Profesor:	Solo cuántas.
226.	Mariana:	Una, que atraviesa a esos dos puntos.
227.	Profesor:	¿Solo una? (Lucas levanta la mano)
228.	Lucas:	¿Y si fuera CD y DC? ¿Se puede?
229.	Profesor:	¿Qué pasaría en ese caso?
230.	Paola:	Pues es la misma, porque es recta.
231.	Alex:	Es diferente la notación, pero el orden no importa, no importa si va de derecha a izquierda o de izquierda a derecha. Es lo mismo, ¿Si me entiende?
232.	Paola:	¡Exacto!
233.	Profesor:	Bueno, ya les entendí esa parte. Quiero saber si se puede construir otra recta a parte de la que aparece allá.
234.	Varios:	Solo esa.
		(Julian pasa al frente donde está el profesor y le muestra una construcción en la tablet).
235.	Dana:	En voz alta.
236.	Profesor:	A ver, vamos a mirar la que dice Julian.
237.	Julian:	Pero yo no quería pasar, solo quería opinar.
		(El profesor le entrega la tablet del grupo a Julian).
238.	Profesor:	Él tiene una idea.
239.	Julian:	Pues yo pongo un punto intermedio y pues la recta CE sería la misma recta ¿no?
240.		
241.	Profesor:	Es una idea muy valiosa. Miren lo que dice Julián, no se si lo alcanzaron a escuchar. Julián nos dice, pues pongamos el punto E en la recta, entonces aparecen las rectas ED y EC. Ustedes qué dicen, ¿estas ya son otras rectas?
242.	Varios:	Pues sí.
243.	Lucas:	Sí, pero dijimos que solo con dos puntos.
244.	Profesor:	Aja… Bueno, solo con dos puntos. Pero esta construcción ahorita la volvemos a retomar, porque me parece interesante. (El profesor coge la tablet grupal) Listo, entonces si yo creo la recta EC y ED ¿qué pasa con esa recta?
245.	Mariana:	Están encima de la recta CD.
246.	Profesor:	Pero… ¿serán qué?.

247.	Laura:	La misma.
248.	Profesor:	La misma ¿cierto? Ah bueno. Ese que acabamos de hacer, es un postulado y lo tomamos como algo verdadero que no lo vamos a discutir. Listo, entonces vamos a llamarlo postulado dos puntos recta [Anota en el tablero el nombre del postulado] y ese postulado dice lo siguiente. Ustedes ¿cómo lo pondrían? ¿qué dice Nicolás Ardila que no lo he escuchado?
249.	Nicolas:	Pues por dos puntos.
250.	Profesor:	Listo. ¿Por dos puntos qué?
251.	Nicolas:	Pasa una sola recta.
252.	Profesor:	Qué dicen ustedes, voy a escribir tu idea. "Por dos puntos puede pasar solo una recta".
253.	Mariana:	Sí, está bien.
254.	Profesor:	¿Habrá otra manera de escribirlo?
255.	Julián:	Puede ser (… …) Nombrando los puntos y la recta
256.	Profesor:	Bien, como solo faltan cinco minutos de clase, la proxima clase empezamos con este ejercicio ¿bien? Porfavor entregan las tablets.
Fin de la transcripción.		

Anexo B. Transcripción de la puesta en común del Teorema Punto-rectas

1.	Profesor:	Buenos días.
2.	Todos:	Buenos días profe.
3.	Profesor:	Alejandra ¿puedes cerrar la puerta por favor?
4.	Alejandra:	Si profe
5.	Profesor:	Bueno, ¿se acuerdan del último problema que dejé escrito la anterior semana?
6.	Algunos:	Sí
7.	Profesor:	[Escribe en el tablero] Bien, el problema era el siguiente, ustedes tenían que contestar a la pregunta ¿cuántas rectas pasan por un punto? Bueno, entonces qué concluyeron. Haber, tu Laura a qué llegaste
8.	Laura:	Mmmm ¿puedes repetir?
9.		A ver, pongan atención a las ideas de sus compañeros y a lo que digo. Te repito, según tu exploración, ¡cuántas rectas pasan por un punto? (…) Hagamos una cosa, Julián, por favor ayúdame con entregar las tablets a cada uno.
10.	Julián:	Bueno profe
11.	Laura:	Pues profe yo empecé a construir una
12.	Profesor:	Con qué opción
13.	Varios:	Con la que vimos la clase pasada
14.	Profesor:	¿Si se acuerdan de esa opción que da GeoGebra que dice la compañera?
15.		Sí.
16.	Profesor	Igual sigan las construcciones en sus tablets. Bueno, pero ¿solo encontraste una?
17.	Laura:	No profe, utilicé esa opción varias veces
18.	Paola:	Se pueden construir infinitas rectas
19.	Profesor:	Por favor los estudiantes de atrás hagan silencio. Laura, encárgate de anotar a las personas que no estén poniendo atención a las ideas que están dando los

		compañeros.
20.	Laura:	Sí señor.
21.	Profesor:	Bueno, ya volviendo al tema, aparecen ahora sí varias, muchas rectas. Pero ¿qué será? ¿Podríamos escribirlo como un postulado o un teorema y ¿por qué? ¿Qué nos diría por allá Nicolás? Cuéntanos, porque si es teorema, tendríamos que escribirlo como una afirmación que tiene ¿qué forma?
22.	Nicolás:	Sería, si A es un punto, entonces existen infinitas rectas m.
23.	Profesor:	[Escribe en el tablero lo que dice Nicolás] ¿No falta algo?
24.	Laura:	Que los contienen
25.	Profesor:	Sería: Si A es un punto, entonces existe infinitas rectas m que lo contiene. Y ¿dices que es teorema o postulado?
26.	Nicolás:	Teorema.
27.		
28.		
29.		
30.	Profesor:	Si dices que es teorema, ¿se puede decir algo de él con respecto a los postulados y teoremas que vimos anteriormente? ¿Cómo podríamos iniciar? María del Mar, ¿qué se te ocurre?
31.	Mar:	Postulado existencia para decir que el punto y la recta existen.
32.	Profesor:	A ver chicos, escuchen. María del Mar, ¿Puedes volver a decir tu propuesta?
33.	Mar:	Hay que empezar por el postulado existencia para poder decir que el punto y la recta existen.
34.	Profesor:	¿Todos de acuerdo con esa [idea]? ¿Necesitamos primero hablar de ese postulado de existencia? ¿Qué dice Julián?
35.	Julián:	De pronto sí.
36.	Profesor:	Pero acá (enunciado del teorema) me dice "si A es un punto" [lo lee del tablero]. Ahí está dado A ¿cierto? De que existe A, ya está. O sea, no necesariamente tendría que irme al postulado de la existencia para garantizar que existe A, ¿cierto? A ya está, pero ¿qué necesitaría para garantizar las infinitas rectas que ustedes dicen que existen? ¿Qué necesitaría Michel?
37.	Michel	Garantizar que existen infinitas rectas.
38.	Profesor:	[…] Por ahora tenemos el punto A ¿no? ¿Qué más podríamos garantizar? ¿Qué necesitamos para que haya otra recta?
39.	Paola:	Pero sí se puede utilizar, para crear otro punto, ¿no?
40.	Profesor:	A ver, cuéntanos tu idea

Anexo C. Transcripción de la puesta en común del Teorema punto al lado – punto medio

1.	Profesor:	Buenos días.
2.	Varios:	Buenos días profe.
3.	Profesor:	La clase pasada habíamos terminado un problema. Sofía, ¿qué decía le problema? ¿De qué se trataba? ¿Te acuerdas? [Dados dos puntos A y M, construir un punto B de tal forma que M sea punto medio del segmento AB]. Pueden mirar el cuaderno para

		saber en qué habíamos terminado. Mientras tanto, les voy a entregar una hojita para que la tengan. Allí encuentran lo que hemos visto durante este trimestre.
4.	Andrés:	Profe, ¿tenemos que marcar la hoja?
5.	Profesor:	Márquenla si quieren. (El profesor entrega la hoja a cada uno) (…)
6.	Paula:	(Le muestra al profesor algo del cuaderno mientras él le entrega la hoja).
7.	Profesor:	(Dirigiéndose a Paula) Ahorita si quieres lo comentas a todo el grupo.
8.	Paula:	Este si está bien, pero el otro no se todavía.
9.	Profesor:	Bueno, la hoja que les cabo de entregar (…) Sofía, ¿te acuerdas cuál era el problema anterior? Escuchamos, pilas que estoy preguntando y Laura me lleva el registro, ¿bueno?
10.	Sofía:	Ehhhh… Dados dos puntos. O sea, tener un punto A y un punto M (representa un punto con un dedo de la mano derecha y el otro con el dedo índice de la izquierda) y que… Crear otro punto, o sea, que fuera el punto medio (vuelve a poner el dedo índice como si fuera en la mitad de la distancia que le dio)
11.	Profesor:	Crear otro punto. ¿Eso era lo que tenían que hacer?
12.	Laura:	Pues sí, es lo mismo. Construir un segmento con extremo en A. Luego un punto de tal manera que M sea punto medio de este segmento (leyendo en el cuaderno).
13.	Profesor:	Listo, quién lo pudo hacer, ¿Lucas? ¿Nos quieres decir cómo se hace? Porque no alcanzamos a discutirlo acá, ¿cierto? Entonces acá Lucas lo va a hacer. Presten atención ustedes allá, porque vamos a hacer una actividad con respecto a lo que estamos viendo
14.	Lucas:	No profe.
15.	Profesor:	¿Nada? Listo, dale tú (señala a Paula) o tú (señala a Mariana). Cualquiera de las dos.
16.	Lucas:	(Le pasa la Tablet a Paula.)
17.	Profesor:	Bueno cuéntanos, ¿qué vas a hacer?
18.	Paula:	Una circunferencia.
19.	Profesor:	Pero hay un problema, porque de dónde se parte.
20.	Algunos:	De un punto.
21.	Profesor:	¿De un punto? ¿O de cuántos?
22.	Algunos:	De mucho.
23.	Profesor:	¿De muchos?
24.	Otros:	De dos.
25.	Profesor:	De dos puntos, ¿cierto? Entonces no puedo hacer una circunferencia. Entonces primero crea los dos puntos.
26.	Paula:	Crea los dos puntos en GeoGebra.
27.	Profesor:	¡Pilas! Porque el que esté bien distraído, le voy a preguntar.
28.	Paula:	Listo, ahora sí.
29.	Profesor:	Pero coloquémosle de una vez el nombre [a los puntos].
30.	Paula	[Nombra a los puntos A y M]
31.	Profesor:	Listo, así empezaba el problema. Entonces qué hacemos, que sigue
32.	Paula.	Ahora si puedo trazar la circunferencia
33.	Profesor:	Bueno, voy preguntando, por qué vas a hacer una circunferencia, o por qué creen los demás que vamos a hacer una circunferencia y ¿por qué no hacer otra cosa?
34.	Sofía	Profe, pero M tiene que ser punto medio.
35.	Profesor	Ahhh ¿Y entonces?

36.	Paula:	O sea el centro es M
37.	Profesor.	¿Si? Qué dicen los demás. Bueno, entonces ahí Sofía dice pues M (señalando el televisor donde se encuentra el punto M en la construcción de GeoGebra) tiene que ser, o sea tiene que cambiar este y este (señalando los dos puntos). Colocale M_1, para que luego le puedas colocar A y cambie de nombre. Bien, listo, ahora voy a preguntar ¿por qué hiciste esa recta?
38.	Paula:	Porque si no la trazo, pues no (…) no va (…) si trazo dos segmentos (señas con los brazos con los dedos índices horizontalmente hasta que se unen y se separan "formando un segmento") Si se va a mover uno, no se va a mover el otro y ahí va a cambiar y no va a ser el punto medio
39.	Profesor:	Qué dicen los demás
40.	Michael	Sería más para ubicar el punto en la (…)
41.	Profesor:	¿En la circunferencia?
42.	Michael	En la recta
43.	Paula:	La recta es para que cuando mueva el punto A, no se cambie el punto M, que no cambie, que no deje de ser el punto medio
44.	Profesor:	Qué dice María José, está de acuerdo o no (…) y tampoco me han dado respuesta, quiero que tú lo hagas, del por qué utilizar circunferencia, para qué son útiles las circunferencias.
45.	María Jose	Para encontrar las mismas distancias
46.	Profesor:	Sí, o no. Bien, vamos a intentar demostrar esto
47.	Sofía:	Para hacer el punto medio
48.	Profesor:	Bien, vamos a intentar demostrar esto, entonces voy a preguntarle al azar. Sofía [María Sofía], dame un nombre al azar (… … …) miren por favor en sus mesas dónde dejé mi cartuchera, ¿no está por ahí? Tan raro (…) acá está. Bien, al azar uno.
49.	María Sofía	Lio Rodríguez Juan Pablo
50.	Profesor:	Bien, Juan Pablo, vamos a intentar escribir lo que acabamos de hacer como un teorema, todavía no le vamos a poner un nombre, entonces le vamos escribir, teorema algo (escribe en el tablero T.) Recuerden que (…) ¿cómo era que uno escribía los teoremas?
51.	Laura	Si esto, entonces
52.	Profesor:	Entonces, Juan Pablo… La primera, si
53.	Juan Pablo:	Si A en la circunferencia está con M_1, entonces
54.	Profesor:	Espera, allá están hablando y no dejan escuchar. Pilas que voy a preguntar.
55.	Jaun Pablo	Si B está en la circunferencia, entonces A y M_1 están conectadas (mira el cuaderno). No, si B está en la circunferencia en el centro de M_1, entonces A y B están conectados entre un orden.
56.	Profesor:	A ver, qué dice Sergio, de acuerdo o no de acuerdo.
57.	Sergio	No, porque no es el punto B
58.	´Profesor:	Ahhh no podríamos hablar del punto B todavía, Pero entonces por dónde arranco acá, si qué
59.	Sergio:	Si hay un punto M
60.	Profesor:	Bueno, qué dicen los demás, porque de eso partió, ¿cierto? Paula empezó a colocar dos puntos, entonces vamos a colocar si A y M puntos (escribe en el tablero)
61.	Sergio:	No, si hay un punto M

62.	Profesor:	Ahhh ok. O sea, si hay (escribe en el tablero) si hay qué
63.	Sergio.	Un punto M
64.	Profesor:	¿Un punto M? ¿Así? ¿Qué dicen?
65.	Camila:	Si hay dos puntos
66.	Profesor:	Si hay dos puntos…
67.	María sofía	Existe una recta
68.	Camila	Ajá
69.	Profesor:	Bueno, pero miren lo que queremos hacer nosotros, miren el problema. Hay dos puntos, ahí los nombrábamos (…) María José (…) Dana (…) ¿Qué quería yo hacer? ¿Encontrar quién?
70.	Camila:	M
71.	Profesor:	¿Encontrar M? no
72.	Luisa	No, encontrar B
73.	Profesor:	Encontrar B, tal que ¿qué?
74.	Luisa:	Para que M sea el punto medio de A y B
75.	Profesor:	Ahh bueno, esa es la información que yo necesito colocar acá [en el tablero]. Entonces, tú me dices Si hay M punto, podríamos entonces, por acá, tenías una idea, ¿cierto? (Señalando a Luisa)
76.	Luisa:	Si hay dos puntos
77.	Profesor.	Si hay dos puntos, ¿cierto? Pero ya los tenemos (… silencio). Entonces si hay dos puntos. ¿Cómo se llamaban los puntos?
78.	Varios:	A y M
79.	Algunos:	M_1 [Por cómo estaban escritos en la Tablet (GeoGebra)]
80.	Profesor:	Pongámosle M y no M_1. Entonces si hay M puntos (… silencio) ¿qué sigue? Matías qué dice. Si hay M puntos… Qué es lo que yo quiero hacer
81.	Paula:	Hallar el otro punto.
82.	Profesor:	Ajá, entonces qué hago. (…) Mejor dicho, si hay m punto entonces qué pasará. Si A y M son puntos, entonces qué pasará
83.	Daniela:	Emm hay una recta
84.	Profesor:	¿Hay una recta? Entonces existe una recta
85.	Sofía:	Segmento
86.	Profesor:	¿Hay un segmento? Es que aunque haya una recta, en realidad lo estaba preguntando por el punto medio del segmento, ¿cierto? Que M sea el punto medio, es decir, si A y M son puntos, entonces existe (mientras copia en el tablero). Existe ¿quién? ¿a recta?¿Queríamos encontrar una recta? O ¿qué queríamos encontrar?
87.	Varios:	Otro punto, un segmento, la recta
88.	Profesor:	¿Qué queríamos encontrar nosotros?
89.	Paula	¿Un segmento?
90.	Sergio:	Otro Punto
91.	Profesor:	Otro punto. ¿Qué punto? ¿Cómo lo queríamos llamar nosotros?
92.	Paula:	B
93.	Profesor:	Copia en el tablero Existe B punto tal que ¿qué? M es el punto medio ¿de quién?
94.	Paula y sofía:	De AB
95.	Profeosr:	¿De la recta AB o del segmento?

96.	Sofía:	De la recta AB
97.	Paula	Del segmento AB
98.	Profeor:	Del segmento. Pilas que las rectas no tienen puntos medios, aunque ahí nos faltó hacer el segmento o quitar la recta (en la construcción). Entonces, (Mientras lee en el tablero) tal que Me es punto medio del segmento (copia) AB. Si señores, así quedaría bien.
99.	Manuel:	Profe cómo se llama
100.	Profesor:	Ah bueno, ahorita le ponemos un nombre. Bueno, ¿qué nombre le parecería a usted que le podemos colocar? {Se acaba video}
101.	Varios	Punto Medio
102.	Profesor:	Bien, entonces Teorema del punto medio. Pero miren que existe ¿Cierto? Bueno, voy a ponerlo acá, teorema del punto medio. (… … …) ¿Dónde está la tablet? Bien, yo hice lo siguiente, quiero que por ahora esa hojita que yo le di, es para que usted recuerde lo que hemos hecho, las definiciones que hemos construido, los postulados y los teoremas. Entonces en el Moodle yo puse este video, dónde está (…)
103.	Varios	Ruido mientras que el profesor le está pidiendo un favor a una estudiante de la Tablet.
104.	Profesor:	Bien, de una vez les cuento que a Moodle lo último que subí fue esto (El marco teórico que se lleva hasta el momento en word) actualizado hasta el día de ayer, están todos los Teoremas que hemos visto están acá. Usted lo puede descargar. El papel que les entregué está súper reducido para ahorrar papel, pero también lo pueden encontrar por la plataforma, los teoremas, postulados y definiciones. Este fue el que ustedes miraron, ¿cierto? (señalando en el TV el teorema) de los primeros que habían como unos errores para que ustedes transcribieron ahí. Acá vienen los dos planes de apoyo que yo les voy a decir la próxima semana quién ya debería empezar a hacerlo. Siguiendo también está el horario de tutorías que también lo actualicé. Y está lo que vamos a hacer lo del día de hoy, que es el teorema del punto medio que ustedes están hablando. Vamos a ver este video (… … …) Entonces necesito que cierren los cuadernos y presente atención acá, porque la actividad que voy a hacer ahorita requieren que usted interiorice la demostración de este teorema, o sea, yo se la voy a dar y ahorita ustedes van a hacer un ejercicio con eso, así que pilas. Esta es la situación que teníamos que nos construyó paula ¿curto? Y acá está el teorema (señalando el TV donde está el enunciado del teorema) como ustedes allá lo trataron de enunciar. Entonces (el profesor lee el enunciado que está en la TV por la parte superior) Dados A y M, entonces existe B tal que M es el punto medio del segmento AB. Haber, quiero que me digan ¿qué sabemos?
105.	Laura:	Existen A y M
106.	Luisa:	Que M es punto medio
107.	Daniela:	Que A y M son puntos
108.	Profesor:	Que A y M son puntos, eso es lo que hasta ahora yo sé. Entonces vamos a ver (hace el primer paso pasando la diapositiva en TV). Listo, bien. En el qué uso va a haber algo nuevo que es algo que se llama construcción". Nosotros qué estamos construyendo acá, ustedes qué creen, de lo que hizo Paula
109.	María Sofía	Una circunferencia
110.	Profesor:	Una circunferencia, entonces en qué concluyo qué irá (…) una circunferencia. ¿Cuál será el centro de esa circunferencia, ustedes qué dirán?
111.	Varios:	M

112.	Profeso:	¿Y el radio?
113.	Varios:	A
114.	Otros:	A y B
115.	PROFESO R:	AI, porque B todavía no ha salido. Vamos a ver
116.	Laura:	Profe ¿ese teorema hay que copiarlo?
117.	Profeosr:	No, no, no. Nadie va a copiar nada, todos van a cerrar los cuadernos. Listo, miren, acá la embarré y hasta ahora me doy cuenta. ¿Qué pasó acá? Es en Centro M, porque la circunferencia que estamos haciendo es con centro en M. Luego qué fue lo que hicieron ¿Qué fue lo que hizo Paula?
118.	Sofía	Una recta
119.	Profesor:	Una recta, ¿cierto? Entonces por acá que sé otra vez, que A y M son puntos. Volví otra vez a utilizar la misma afirmación. No necesariamente tengo que volver a utilizar lo que aparece en qué concluyo, lo puedo utilizar quizás en otro paso, pero algo que sabía yo era que A y M son puntos. ¿Qué voy a usar para que exista la recta?
120.	Laura:	Una construcción
121.	Profesor:	¿Una construcción? Pero había otra cosa en nuestro sistema teórico, si quieren pueden ver esa hojita, la hojita si la pueden mirar, para que me digan qué nos puede servir.
122.	Daniela:	El teorema punto recta
123.	Profeosr:	¿Teorema punto-recta? Es teorema o postulado
124.	Daniela:	Digo, postulado
125.	Varios:	Postulado
126.	Profesor:	Pero miren cómo se llama. Postulado punto-recta
127.	Alejandro:	Postulado dos puntos, recta.
128.	Profesor:	¿Qué voy a concluir?
129.	Juan Pablo:	Qué hay una recta
130.	Profesor:	Y ¿cómo se llama esa recta?
131.	Algunos:	AM
132.	Profesor:	Listo, AM recta. (Pasa la siguiente "diapositiva") Uy miren, ahí me adelante un poco. Pero recuerden que acá yo tengo un error que necesito que cuando hagamos la actividad ustedes lo corrijan. ¿Cómo es que se llama esta circunferencia?
133.	Alejandra	AM con centro en M
134.	Daniel:	De A a M
135.	Profesor:	Ah bueno, tenemos que aprender también la lectura de este (señalando la circunferencia) Ya no vamos a escribir toda la palabra "circunferencia" , sin que vamos a realizar este círculo (señalándolo en la diapositiva que está proyectando). Luego, sigue el centro y finalmente el radio, en este caso MA o AM y tengo la recta AM. Aquí por construcción qué fue lo que creó Paula
136.	Paula:	Un punto
137.	Profesor:	Creó un puto B, cierto? Entonces por construcción yo también voy a crear puntos. Entonces miren lo que voy a concluir acá. Lo que concluyo es que existe B tal que B pertenece a la intersección se acuerdan, de la circunferencia con centro en M, radio MA y la recta AM. Si es claro esta parte? Es como la notación. Acuérdense que nosotros habíamos visto iniciando el año la notación de intersección, pero no habíamos visto que la circunferencia. ¿Habíamos visto la intersección de quiénes?

138.	María:	En rectas
139.	Profesor:	De rectas ¿cierto? y aquí vemos que en este caso en particular se interseca la recta con la circunferencia en cuantos puntos?
140.	Paula:	En tres
141.	Profesor:	¿En tres?
142.	Laura:	En dos
143.	Profesor:	En este caso cuales son
144.	Varios:	A y B
145.	Profesor:	Listo, vamos a ver cuál es el siguiente paso. Cuarto, de este mismo paso, algo que se es que b pertenece a la recta am, si o no y también se que pertenece a la circunferencia. Bien, si utilizo la definición de colinealidad qué voy a concluir.
146.	María:	Que A, M, B son colineales
147.	Profesor:	Sí, que A, b son colineales. Bien, entones ya son colineales. Ustedes que creen que nos faltan para lograr esta demostración
148.	Paula:	Decir que M es el punto medio de AB
149.	Profesor:	Entonces ustedes qué creen que puede ir acá en el quinto paso
150.	Pimera mesa adelante	Que AB es un segmento
151.	Profesor:	¿Tú dices que AB es un segmento?
152.	Primera mesa de atrás	¿LA equidistancia?
153.	María:	¿Que son congruentes?
154.	Profesor:	Vamos a ver. Cambia de diapositiva. Lo que concluye acá, tienes razón, Para qué yo quiero saber que A, M y B son colineales. Por la construcción que yo hice, se acuerdan ¿Qué era lo que yo necesitaba garantizar para que M fuera punto medio? Díganme las dos razones, Ana María, ¿te acuerdas?
155.	Ana María	Cuando dos segmentos son congruentes
156.	Profesor:	Cuáles
157.	Ana María:	AM con BM
158.	Profesor:	O sea la igualdad de estos dos segmentos (Señalándolos en las diapositivas) 11:18 - 2 y la otra [Propiedad]
159.	Juan Pablo:	M pertenece al segmento AB
160.	Profesor:	¿Cierto? Y para decir que este Me pertenece a este segmento, por la construcción que yo hice me dice que está entre A y B, o sea que ya me está garantizando la primera condición de punto medio, ahora cual me falta… La congruencia de estos dos, ¿cierto? Qué creen que vamos a coloca acá ahora [En qué sé de la justificación] para garantizar esa congruencia
161.	Paola:	Que es el punto medio del radio
162.	Prfoesor:	¿Los radios? Miren lo que escribí acá [Cambia la diapositiva] ¿sabemos esto? ¿Que A y B pertenecen a la circunferencia con centro en M y radio AM? Si lo sabemos, ¿cierto? Eso lo sabíamos. Qué vamos a colocar acá, ustedes qué creen (En qué uso) ¿Necesito hablar de unos segmentos no? Este AM y MB qué son de la circunferencia
163.	Algunos:	Radios

164.	Profesor:	Adiós, ¿cierto? entonces miren que voy a usar tanto la definición de circunferencia como la definición de radios de la congruencia, voy a concluir que
165.	Paula:	Que M es punto medio del segmento
166.	Profesor:	¿Será? Porque si ustedes revisan en la hojita que les dí, ahí está la definición de radio. En esa definición de radio de circunferencia qué dice, quién me la quiere leer
167.	Laura	(Levanta la mano)
168.	Profesor:	A ver Laura
169.	Laura:	Un radio de la circunferencia es un segmento cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto que está en ella.
170.	Profesor:	¿Y tenemos eso? Miren que A y B son puntos que están donde
171.	Algunos:	En la circunferencia
172.	profesor.	Y en este caso M es quien
173.	Paula:	El punto medio
174.	Algunos:	El centro
175.	Profesor:	Entonces, si yo utilizo la definición de radio, qué va a aparecer
176.	Paula:	Que los dos son congruentes
177.	Profesor:	No, todavía no va a aparecer eso
178.	Andrés	Que A y B equidistan de M
179.	Profesor:	No. Si estamos hablando de radios, acá lo que va a aparecer es que esos segmentos son radios, porque estoy utilizando la definición de radios de circunferencia. En el paso siete ustedes qué creen que va a parecer
180.	Laura	Que son congruentes
181.	Profesor:	¿Que son congruentes? ¿Pero qué me lo garantiza?
182.	Laura:	La definición de
183.	Profesor:	¿La definición? No, miren esa hoja, quiero que miren esa hoja, porque yo me acuerdo que en una clase vimos algo que tenía que ver con los radios
184.	Dana:	El teorema radios congruentes
185.	Profesor:	Qué dice ese teorema Dana
186.	Dana:	Dados los segmentos AB y AX radios de una circunferencia, entonces el segmento es congruente con el segmento AX. [Lo lee d la hoja entregada por el profesor]
187.	Profesor:	Pero entonces en el “qué sé” qué voy a utilizar
188.	Paula:	¿Que son radios?
189.	Dana:	Que AM son radios de
190.	Profesor:	Que Estos dos segmentos son radios y qué voy a usar
191.	Varios	Teorema radios congruentes
192.	Profesor:	Y qué voy a concluir
193.	Varios:	Que AM y BM son congruentes
194.	Profesor:	Vamos a ver si sale eso. Muy bien, lo dieron perfecto. Listo, ¿qué es lo último que me faltará en esa última casilla, nada? Qué es lo que necesito hacer, ¿Cuál es el último paso?
195.	Mateo:	Que M es el punto medio del segmento
196.	Profespr:	Necesito llegar a eso, que m es el punto medio del segmento AB. Que es lo que se acá.
197.	Laura:	Que son congruentes
198.	Profesor:	Y que ora cosa, porque recuerden que eran dos propiedades.

199.	Lucas:	Que son colineales
200.	Profesor:	Miren las garantías
201.	Paula:	Ahh lo de las rectas
202.	Profesor:	Acuérdense que Sofía nos dijo que esta tiene que ir (los segmentos congruentes) pero también, que M está entre A y B. entonces eso iría acá (en que se) qué ira acá (Que uso)
203.	Natalia:	Construcción
204.	Profesor:	¿Construcción?
205.	Daniel:	Definición de punto medio
206.	Profesor:	¡Correcto! y ¿qué voy a concluir?
207.	Varios	Que M es punto medio del segmento AB. Claro, utilizando la definición de punto medio, se llega a que M es el punto medio de A y B. Fácil o difícil
208.	Algunos:	Difícil
209.	Profesor:	Miren que ya fue saliendo como los pasos, ¿cierto? Bueno, vamos bien con la demostración del teorema. La próxima clase seguimos con los siguientes pasos para concluirlo, ¿vale?
Fin de la transcripción.		