ALGUNAS REPRESENTACIONES DE PI A TRAVÉS DE LA HISTORIA

JHENYFER CEPEDA MOGOLLÓN
ROBINSON FERNEY GALICIA SÁNCHEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2016

ALGUNAS REPRESENTACIONES DE PI A TRAVÉS DE LA HISTORIA

JHENYFER CEPEDA MOGOLLÓN
Cód.: 2011140012 C. C.: 1033772009
ROBINSON FERNEY GALICIA SÁNCHEZ
Cód.: 2011140021 C. C.: 1023920629

Trabajo de grado asociado a la modalidad “interés profesional de los estudiantes” para ser presentado al departamento de matemáticas y con ello optar por el título de licenciado en matemáticas.

ASESOR
WILLIAM ALFREDO JIMÉNEZ GÓMEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2016

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Algunas representaciones de PI a través de la historia
Autor(es)	Cepeda Mogollón, Jhenyfer; Galicia Sánchez, Robinson Ferney.
Director	William Alfredo Jiménez Gómez
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. 2016, 102 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	REPRESENTACIONES, HISTORIA DE π, HERRAMIENTA, OBJETO CENTRAL DE ESTUDIO.

2. Descripción

El desarrollo de este trabajo se centra en indagar la historia de π y extraer algunas representaciones que se han evidenciado a lo largo del tiempo en cada uno de los problemas o situaciones que las diferentes comunidades se han encontrado, es por eso que parte de este trabajo se centra en dos importantes momentos, uno de ellos toma a π como herramienta para la solución de diversos problemas, en su mayoría geométricos, y otro teniendo a π como objeto central de estudio, abordado por medio de expresiones infinitas y con ayuda de medios computacionales.

3. Fuentes

Arndt, J., & Haenel, C. (2000). *Pi: Unleashed.* Berlin: Springer.

Borwein, J. (24 de Junio de 2011). *The Life of Pi: From Archimedes to Eniac and Beyond.* Obtenido de SCIPP (Santa Cruz Institute for Particle Physics): http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph116A/pi-2010.pdf

Boyer, C. (1991). *A history of mathematics.* New York, Toronto: Jhon Wiley & Sons, INC. .

Collette, J. (2002). *Historia de las matemáticas I.* Francia: siglo veintiuno editores, s. a. de c. v.

Deulofeu, J., & Figueiras, L. (2002). *Las medidas a través de la historia.* Obtenido de Matemátiques I, UAB.: http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4701/lfo2de2.pdf;jsessionid=C5656A6AD8FC2B0A4451A0B11D432E5B.tdx1?sequence=2

Hofmann, J. (2002). *Historia de la matemática: desde el comienzo hasta la Revolución Francesa.* Estados Unidos de América: Limusa.

Posamentier, A., & Lehmann, I. (2004). *A Biography of the World's Most Mysterious Number.* New York: Prometheus Books.

Posamentier, A., & Lehmann, I. (2004). *A Biography of the World's Most Mysterious Number.* Prometheus Books.

Rico, L. (2009). *SOBRE LAS NOCIONES DE REPRESENTACIÓN Y COMPRENSIÓN EN LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.* Obtenido de Dialnet: https://www.google.com.co/?gfe_rd=cr&ei=6FIKVYPYO-mlsQfU9IGwDQ&gws_rd=ssl#q=SOBRE+LAS+NOCIONES+DE+REPRESENTACI%C3%93N+Y+COMPRENSI%C3%93N+EN+LA+INVESTIGACI%C3%93N+EN+EDUCACI%C3%93N+MATEM%C3%81TICA

Universo Matemático, L. a. (2000). Historia de π. España.

4. Contenidos

Este trabajo de grado contiene en su primer capítulo un acercamiento a la definición y clasificación del término representación, inicialmente en un ámbito general hasta un significado desde la didáctica de las matemáticas. En el segundo capítulo se realiza una organización cronológica de las representaciones encontradas en el video "Historias de pi" de la televisión española. En el tercer capítulo se exponen algunas representaciones y trabajos de π como instrumento de estudio. En el cuarto capítulo se evidencian representaciones de π como objeto de estudio. Finalmente en el quinto capítulo se muestra la importancia de las representaciones en la didáctica de las matemáticas que es el campo de estudio junto con las conclusiones y resultados finales.

5. Metodología

Para el desarrollo de este trabajo se tuvieron en cuenta algunos referentes teóricos importantes para la elaboración del trabajo, como el significado de las representaciones y la clasificación de las mismas. Posteriormente se hace un sondeo de la información encontrada en el video que sirvió de fuente de inspiración y también de base para el desarrollo de este trabajo y se organiza cronológicamente mediante un cuadro, el cual sirvió para identificar los dos momentos enunciados anteriormente; se exponen dos capítulos siguientes que contienen a π desde esas dos perspectivas y finalmente se encuentra un capítulo que surge como consecuencia de todo lo anterior y de la formación docente: la importancia de las representaciones en la didáctica de las matemáticas.

La elaboración de lo mencionado en el párrafo anterior, se realizó bajo la consulta de libros especializados en la historia de las matemáticas como son *A history of mathematics* de Carl Boyer, *Historia de las matemáticas* de Jean Paul Collette, entre otros; también de libros especializados en el estudio de π como *A Biography of the World's Most Mysterious Number* de Alfred Posamentier e Ingmar Lehmann, *Pi-Unleashed* de Jörg Arndt y Christoph Haenel, entre otros; y también artículos especializados en el estudio de las representaciones y la importancia de las mismas en la didáctica de las matemáticas de autores como Luis Rico y claro esta que se tuvo en cuenta la información mostrada en el video *Historias de* π de Universo matemático como punto de partida del trabajo.

6. Conclusiones

Indagar acerca del recorrido histórico de un objeto matemático no es una labor fácil, y más cuando se encuentra bastante información de él, y hay que saber qué elegir y cómo elegir dicha información. Este trabajo permite realizar un barrido histórico acerca de algunas representaciones del número π, algunas aproximaciones a las cuales se llegaron, y en algunas cómo fue que surgieron.

Este trabajo ha proporcionado a los autores del mismo, una visión más amplia acerca de π y esto implica que para conocer cualquier objeto matemático desde la pedagogía se deban reconocer diversas representaciones, ya que con una sola de ellas pueden escaparse características del objeto, que en otras representaciones se puedan resaltar.

Elaborado por:	Cepeda Mogollón Jhenyfer Galicia Sánchez Robinson Ferney
Revisado por:	Jiménez Gómez William Alfredo

Fecha de elaboración del Resumen:	16	02	2016

Contenido

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de este trabajo se centra en indagar la historia de π y extraer algunas representaciones que se han evidenciado a lo largo del tiempo en cada uno de los problemas o situaciones que las diferentes comunidades se han encontrado, Es por eso que parte de este trabajo se centra en dos importantes momentos, uno de ellos toma a π como herramienta para la solución de diversos problemas, en su mayoría geométricos, y otro teniendo a π como objeto central de estudio, abordado por medio de expresiones infinitas y con ayuda de medios computacionales.

Para esto se tuvieron en cuenta algunos referentes teóricos importantes para la elaboración del trabajo, como el significado de las representaciones y la clasificación de las mismas. Posteriormente se hace un sondeo de la información encontrada en el video que sirvió de fuente de inspiración y también de base para el desarrollo de este trabajo y se organiza cronológicamente mediante un cuadro, el cual sirvió para identificar los dos momentos enunciados anteriormente; se exponen dos capítulos siguientes que contienen a π desde esas dos perspectivas y finalmente se encuentra un capítulo que surge como consecuencia de todo lo anterior y de la formación docente: la importancia de las representaciones en la didáctica de las matemáticas.

La elaboración de lo mencionado en el párrafo anterior, se realizó bajo la consulta de libros especializados en la historia de las matemáticas como son *A history of mathematics* de Carl Boyer, *Historia de las matemáticas* de Jean Paul Collette, entre otros; también de libros especializados en el estudio de π como *A Biography of the World's Most Mysterious Number* de Alfred Posamentier e Ingmar Lehmann, *Pi-Unleashed* de Jörg Arndt y Christoph Haenel, entre otros; y también artículos especializados en el estudio de las representaciones y la importancia de las mismas en la didáctica de las matemáticas de autores como Luis Rico y claro esta que se tuvo en cuenta la información mostrada en el video *Historias de* π de Universo matemático como punto de partida del trabajo.

Objetivos

Objetivo general:

Recopilar algunas representaciones del número π a lo largo de la historia de las matemáticas y reconocer los problemas por los cuales se llegaba a la deducción de las mismas, a través de algunos textos, libros, videos o artículos acerca de la historia de π.

Objetivos específicos:

- Consultar referentes teóricos acerca de las representaciones como punto de partida del trabajo.
- Extraer, consultar y redactar sobre las representaciones halladas en Universo Matemático, L. a. (2000). Historia de π. España.
- Investigar en libros, artículos, documentos, entre otros, especializados en historia de las matemáticas que brinden información relevante acerca de π partiendo de las representaciones encontradas en los libros de historia.
- Indagar y estudiar sobre representaciones del número π por medio de series de convergencia, ordenadores, y por medio de procedimientos geométricos.
- Realizar un breve resumen que indique la importancia de las representaciones en la didáctica de las matemáticas y así mismo justifique el sentido del trabajo.

Capítulo 1

Referentes teóricos

Para el desarrollo de este trabajo, es indispensable proporcionar una caracterización del término representación, partiendo desde una definición común o coloquial que se traerá desde el diccionario, luego, se tratara dicho término desde el campo de la filosofía y finalmente desde nuestro campo de estudio, la didáctica de las matemáticas ; esto tiene como fin recopilar información para generar una caracterización del termino representación para así generar un conjunto de categorías que permitan clasificar las representaciones del número pi a lo largo de la historia. Iniciaremos con buscar una definición coloquial:

Según la Real Academia Española de la Lengua (RAE, 2015) la palabra "representación" posee varias definiciones diferentes, ya que se puede brindar desde muchos ámbitos, por ejemplo, desde la psicología, lo define como:

"Imagen o concepto en que se hace presente a la conciencia un objeto exterior o interior". (RAE, 2015);

Desde las matemáticas:

"Figura con que se expresa la relación entre diversas magnitudes". (RAE, 2015);

Y brinda otras definiciones, pero no es nuestro objetivo plasmar todas las expuestas en RAE (2015); pero, con esto observamos que al intentar definir el término "representación", nos enfrentamos a un problema en particular: no existe una sola interpretación o sentido para este término concepto; se evidencia que cada disciplina tiene su propio concepto e interpretación del término "representación.

Para centrarnos más en nuestro objetivo, con base en la afirmación anterior, pondremos en manifiesto distintos puntos de vista de este término por parte algunos filósofos muy importantes en la historia (Platón, Descartes, Kant), ya que hemos percibido en ellos diferentes posiciones filosóficas. (Lo que hace más ardua la labor de definir "representación", ya que, como veremos a continuación, si nos centramos en un ámbito en particular, en este caso, la filosofía, también encontraremos diversas interpretaciones y significados).

Comencemos a mirar lo expuesto por Platón (427 – 347 a.C)[1], que en su intento de explicar la posición del hombre respecto al conocimiento en *el mito de la caverna*, propone que

> *"Nuestro conocimiento es representación de un mundo de ideas a las cuales tenemos acceso indirectamente".* (Rico, 2009, p.2).

Esta interpretación es resultado de la situación que se expone en el mito, en el que dos prisioneros imaginan un mundo con la limitada visión que tienen de él, pero la realidad no es lo que ellos piensan; uno de los dos, al salir de la prisión ya no distingue entre lo que es real y lo que ha imaginado, pero con el tiempo y mediante el razonamiento logra distinguir entre la idea que tiene del mundo y como realmente es; allí Platón propone dos mundos: el mundo sensible (el terrenal, el que percibimos con los sentidos) y el mundo de las ideas. Esto, nos lleva a pensar que nuestras ideas son un mundo de representaciones de lo que creemos que es la realidad y nuestro conocimiento nos permite garantizar si estas representaciones se acercan a lo verdadero, en otras palabras, el mundo de las ideas es un lugar lleno de imaginarios y representaciones del mundo sensible.

Dando un enorme salto hasta el siglo XV, René Descartes (1596 – 1650), define la idea como una representación de un objeto perteneciente al mundo, o del mundo mismo; es decir,

> *"el conocimiento humano no conoce las cosas en sí mismas, sino las ideas de las cosas, es decir, el modo en que éstas se ofrecen a la mente"* (Hernández J., Salgado S., 2010-2011);

[1] Se hace mención al periodo de vida de los filósofos, ya que se debe tener en cuenta que cada interpretación se realiza en una época distinta.

esta idea, para Descartes, puede representar un objeto del mundo y esta representación puede existir sin la necesitas de lo que la originó. Ahora, observaremos la interpretación del autor de la *crítica de la razón*, Immanuel Kant (1724 – 1804).

Partiendo de lo propuesto por Kant, que las representaciones están integradas en una misma unidad (la conciencia), se entiende entonces que las representaciones son generadas mentalmente a través de cosas (conceptos) y eso nos lleva a que los objetos (palpables) correspondan con nuestras representaciones mentales, siendo esto, un supuesto similar a la conexión entre el mundo sensible y el mundo de las ideas en Platón,

> "[…] *y además, que las representaciones son aprehendidas a través de conceptos y que éstos son lo que nos hace pensar en los objetos a los que pueden corresponder las representaciones, entonces debemos aceptar que pensar en términos de objetos es condición de posibilidad de la serie de representaciones que conforman nuestra subjetividad*". (Stepanenko, 2004, pp. 3-9).

Agregando a esto, Kant en la *Crítica de la Razón Pura* dice: "*Los sentidos representan los objetos tal como se manifiestan, mientras que el entendimiento los representa tal y como son. … El entendimiento y la sensibilidad que nosotros poseemos sólo pueden determinar objetos si actúan conjuntamente. Si los separamos tendremos intuiciones sin conceptos o conceptos sin intuiciones. (Kant, B 314)"* (Rico, 2009) En suma, y teniendo en cuenta también las ideas de Platón, Kant propone una conexión indispensable entre estos dos mundos, ya que el mundo sensible representa los objetos tal y como se muestran y el mundo de las ideas los representa tal y como son.

Se han podido distinguir tres posiciones filosóficas diferentes respecto a las representaciones, muchos filósofos distintos a los mencionados también se han ocupado de profundizar en la noción de este concepto, tratando de entender algunos de sus distintas caracterizaciones. Entre ellos han destacado Husserl, Heidegger y Wittgenstein (Llano, 1999) citado en (Rico, 2009) tratando de comprender ciertas concepciones; esto nos permite ver un poco que tan complejo es intentar dar una definición unificada de lo que significa “representación”; pero hay algo importante que rescatar en las tres interpretaciones expuestas: Hay un punto en común en las definiciones, ya sea como un mundo o conceptos que se poseen, en la cual hace alusión a las ideas; Esto nos permite ver que, a pesar de ser diversas interpretaciones, no están alejadas y sin relación alguna una de las otras.

Después de haber realizado una recopilación sobre algunas interpretaciones en el campo de la filosofía, aterrizaremos la indagación a un punto de nuestro interés particular: La educación matemática. Pero en este campo de estudio, la labor no pasa a ser sencilla, algunos autores citados por Rico (2009), definen la representación:

“- Como equivalente a una señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático.

- Cómo un signo o marca con el que las personas piensan las matemáticas.

- Como esquemas o imágenes mentales con la que ésta trabaja sobre ideas matemáticas.” (Autores citados por Rico, 2009).

Todas estas definiciones se brindan en la década de los 80’s y parte de la época de los 90’s, pero no eran las únicas interpretaciones, se le daba otros significados a la palabra representación como: “*símbolo* (Skemp, 1980), *sistemas de registros semióticos* (Duval, 1993), *sistema matemático de signos* (Kieran y Filloy, 1989) *y sistemas de notación* (Kaput, 1992)*”* (Rico, 2009). La comunidad en ese entonces se inclinó por dar prioridad al uso del término “representación”. Según Radford (1998) citado por Rico (2009), Las representaciones matemáticas se han comprendido desde entonces, en un sentido amplio, como:

“herramientas que hacen presentes o visibles los conceptos y procedimientos matemáticos con los que el ser humano interactúa con el conocimiento matemático” (Radford, 1998) citado en (Rico, 2009).

Esta definición de representación, será nuestra perspectiva fundamental a la hora de indagar, estudiar y clasificar las diferentes representaciones, ya que buscamos investigar sobre las herramientas con las cuales algunos matemáticos de la historia hicieron presente su aproximación al número π (series de convergencia, ordenadores, y representaciones geométricas) y es precisamente como en esa definición se toma la representación, como una herramienta que hace presente los conceptos y en nuestro caso, se hará visible el número pi.

Luego de saber qué postura tomaremos para lo que son las representaciones, empezamos a cuestionarnos acerca de las clases o tipos de representaciones que puedan haber, ya que es claro que todas éstas no son las mismas partiendo de la definición tomada. Por ello nos vimos en la necesidad de buscar la clasificación de las representaciones.

Caracterización propia de las representaciones en la didáctica de las matemáticas

Se encuentran dos grandes grupos de representaciones, están las representaciones internas y las representaciones externas (Rico, 2009). Las representaciones internas, como su nombre lo indica se generan en el interior del sujeto que interactúa con el conocimiento matemático, es decir, las imágenes creadas por la mente de algún objeto o conocimiento matemático; por este motivo, no se puede brindar una clasificación de dichas representaciones. En las externas podemos encontrar:

- Enunciados verbales (orales o escritos):
- Representaciones simbólicas: Se encuentran en este grupo los procesos algorítmicos, de carácter alfanumérico, que simulan una programación; representan estructuras matemáticas mediante reglas específicas y sistemas de símbolos aceptados por una comunidad, que da a comprender conceptos, operaciones y relaciones.
- Representaciones gráficas o pictóricas: Los sistemas de representación gráficos recogen las representaciones de tipo figurativo, de carácter analógico, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación, representando imágenes mentales o estructuras conceptuales mediante diagramas e ilustraciones.

- Representaciones que se denominan concretas (físicas, tridimensionales…)
  (Castro y Castro, 1997). En (Rico, 2009)

Vemos que entonces, en la hipótesis planteada en el desarrollo del anteproyecto, no estábamos erróneos al pensar que la programación que sirve para calcular una gran cantidad de cifras de π si es un tipo de representación externa dado que según la anterior clasificación, las representaciones simbólicas pueden ser los procesos algoritmos como el de la programación.

Cabe aclarar que las representaciones internas y externas no son independientes una de la otra, por el contrario, se encuentran muy relacionadas entre sí, ya que una puede apoyar a la otra o viceversa, por ejemplo, al decir la palabra: perro, la mente inicialmente hace la idea que tiene de perro dentro de su cabeza y luego la reproduce mediante representaciones externas con dibujos o incluso con una representación concreta del perro. Igualmente en el caso de las matemáticas, cuando se nombra la palabra: “pi” la mente se hace una idea de π y la reproduce mediante las representaciones externas de cualquier tipo.

Capítulo 2

Una organización cronológica de algunas aproximaciones

Para indagar a profundidad en algunas aproximaciones al número π vistas en el video *Historia de π* (Universo Matemático, 2000) realizado por Universo matemático, se presentará a continuación la información organizada en orden cronológico en una tabla como se describe a continuación:

En la primera columna aparece la aproximación o el valor de π en este se describe la expresión obtenida en los procesos que se estudiaron, según la información mostrada en el video. En la segunda columna se muestra el año, el cual permite dar un orden a la información encontrada respecto a cada aproximación o valor; allí se encuentra el año en el cual se publicó el resultado de π respectivo. En la tercera columna se muestran las personas que realizaron la aproximación a la que se refiere la primera casilla de la fila. En la cuarta columna se explican los sucesos en los cuales se llegó a la aproximación, evidenciando si la intención del autor (autores) pretendían hallar el valor del número π o si se pretendía resolver un problema distinto, y realizando la solución a éste, se llegó a una aproximación o un valor referido al número π; por otro lado, se especifica si los investigadores llegaron a π por trabajar con otro objeto matemático y resultó una aproximación a este, o si trabajaron directamente el valor de π. Finalmente, en la columna quinta, se señala la referencia bibliográfica en la cual se puede evidenciar la forma en la cual se llegó a la aproximación: construcción, serie, etc.; con la cual se llegó a la aproximación.

Esta indagación pretende dar una mirada preliminar a las aproximaciones que se estudiarán posteriormente en este trabajo de grado.

Cuadro 1. Organización cronológica de algunas representaciones.

Aproximación (según el vídeo)	Año	Autor	Propósito	Forma en que se llegó a la aproximación.
$\frac{25}{8}$; 3,125	1900 a.C	Babilonios	Este contenido fue hallado en una tabla de arcilla en 1936, donde habían tallados trabajos acerca del área de la circunferencia. (Arndt & Haenel, 2000). Los babilonios determinaban el perímetro de la circunferencia multiplicando su diámetro por 3, es decir, el valor de π para ellos era 3, pero un arqueólogo Francés desenterró en Susa una plantilla en la cual, haciendo algunos cálculos, se llega a que π es aproximadamente igual a $3\frac{1}{8}$ (Collette, 2002). Los babilonios calcularon el valor de π, asimilando al área del círculo como un valor intermedio entre áreas de los cuadrados inscritos y circunscritos a él. El valor que escogían era de $3r^2$, por tanto se daba el valor de π=3 (Jiménez). **Calcular área del círculo → π**	(Jiménez, p. 2) (Deulofeu & Figueiras, 2002, p. 46)
$\frac{16}{9}^{2}$; 3,16	1650 a.C	Egipcios	El valor de π encontrado por los Egipcios, se deduce de su procedimiento para hallar el área del círculo (Collette, 2002), (Boyer, 1991). El área de un círculo se obtiene formando un cuadrado cuyo lado sea igual a 8/9 de la longitud del diámetro, así el valor es $3\frac{1}{6}$ (Boyer, 1991). Se deriva de querer dar respuesta al problema "Se tiene un campo circular de 9 *khets* de diámetro, ¿cuál es su área?", y su solución es	(Deulofeu & Figueiras, 2002, P. 46) E interpretación de historiadores (Collette, 2002)

			restar $\frac{1}{9}$ al diámetro de la circunferencia y elevar ese resultado al cuadrado (Deulofeu & Figueiras, Las medidas a través de la historia, 2002). **Calcular área del círculo → $\boldsymbol{\pi}$**	
$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$	250 a.C	Arquímedes	En uno de los libros escritos por Arquímedes, afirma que el perímetro de la circunferencia es menor que los $3\frac{1}{7}$ del diámetro, y es superior a $3\frac{10}{71}$ de ese diámetro. (Collette, 2002). En su libro *The measurement of the Circle* establece tres teoremas acerca del círculo, el tercero de ellos dice: **3.** *La relación entre el radio de la circunferencia de cualquier círculo y su diámetro es menor que* $3\frac{1}{7}$ *pero mayor a* $3\frac{10}{71}$ (Arndt & Haenel, 2000). Llega a este resultado realizando cálculos numéricos en su estimación de la razón entre una circunferencia y su diámetro; partiendo de un hexágono regular inscrito y circunscrito en la circunferencia. (Boyer, 1991). **Calcular perímetro circunferencia → $\boldsymbol{\pi}$**	(Jiménez, s.f.) (Arndt & Haenel, 2000, p.170)
$\pi \approx 3{,}1416$	Siglo II	Ptolomeo	En un tratado astronómico que él escribió “Almagest”, el usa un sistema sexagesimal para obtener: $\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3\frac{17}{120} = 3{,}14166666\ldots$ (Posamentier & Lehmann, A Biography of the World's Most Mysterious Number, 2004). **Aunque no se encuentra información exacta sobre el propósito, se infiere con lo recopilado que Ptolomeo trabajaba sobre**	No fue posible encontrar la forma en la cual se llegó a la aproximación, o información al respecto.

			astronomía, y de allí surgió una aproximación de $\boldsymbol{\pi}$.	
$\pi = \frac{355}{113}$	Siglo V	Chung Chih	Tsu Ch'ung-Chih con ayuda de su hijo Tsu Cheng-Chih llegan más lejos con las aproximaciones de π diciendo que 3,1415927 es "un valor por exceso" y que 3,1415926 es "un valor con defecto" para π. Lamentablemente mente la manera como él y su hijo llegaron a estos cálculos están probablemente en alguno de sus libros perdidos. (Boyer, 1991). Tsu Ch'ung-Chih afirma que $\frac{22}{7}$ es una aproximación menos exacta que $\frac{355}{113}$. (Hofmann, 2002). Se considera probable (Arndt & Haenel, 2000) que Tsu Cheng Chih haya usado el método de Liu Hui, el cual calcula, iniciando por un círculo de radio 10, el área de polígonos inscritos a la circunferencia, iniciando por el hexágono; esto intentando hallar, por supuesto, el área del círculo. **Calcular área del círculo → $\boldsymbol{\pi}$**	Basados en lo mencionado por (Arndt & Haenel, 2000), en (Íbid, P.177) se encuentra el algoritmo de Liu Hui.
$\pi \approx 3{,}1415926536$	Siglo XVI	Vietè	Usando el método de Arquímedes (Posamentier & Lehmann, A Biography of the World's Most Mysterious Number, 2004) consideró un polígono regular de 396216 lados. En 1579, este abogado y matemático amateur descubrió 9 cifras decimales de π. El combinó el modelo de Arquímedes con principios de trigonometría, calculando el perímetro de polígonos de $3 \cdot 2^{17} = 393216$ lados. Su resultado fue el siguiente: $n \cdot \sin\frac{180}{n} < \pi < n \cdot \tan\frac{180}{n}$ Y con $n = 393216$,	* **Referido a la construcción geométrica:** (Capitán & Piera, 2006), ya que es una generalización del procedimiento de Arquímedes. * **Referido al producto infinito:** En (Arndt & Haenel, 2000. P.187), se explica cómo se llega al algoritmo.

			$3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926537$ (Arndt & Haenel, 2000) Descubre el primer uso de productos infinitos para determinar el valor de π $$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots$$ (Posamentier & Lehmann, 2004). En 1593, el alcanza este logro (se refiere al uso de productos infinitos) notable tanto histórica como estéticamente, escrito en su trabajo *Variorum de Rebus Mathematics*, generando 15 decimales correctos de π con solo 25 términos. (Arndt & Haenel, 2000) **Calculo directo de π.**	
35 decimales de pi	Finales siglo XVI	Van Ceulen	Se dice que fue el último cálculo arquimediano, usando un polígono de 2^{62} lados, obteniendo 39 cifras decimales, las cuales las primeras 35 son correctas, que fue publicado después de su muerte. Se sigue llamando "el número de Ludolf" en algunas partes de Europa. (Borwein, 2011, p.6) Usó polígonos inscritos y circunscritos de 60×2^{33}, aproximadamente 480 billones de lados. (Arndt & Haenel, 2000, *p.182)* En su tumba, la siguiente aproximación, a la que llegó él, fue grabada: *cuando el diámetro es 1, entonces la circunferencia del círculo es mayor que* $$\frac{314159265358979323846264338327950288}{100000000000000000000000000000000000}$$ *y menor que*	Método de Arquímedes, visto en (Jiménez, s.f.) (Arndt & Haenel, 2000, p.170) (Gourdon & Sebah, 2010)

			$\frac{3141592653589793238462643383279502 89}{10000000000000000000000000000000000}$ (Gourdon & Sebah, 2010) **Cálculo directo de π**	
$\frac{2}{\pi}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\ldots$	1665	Wallis	Jhon Wallis realizó el siguiente producto "interpolado" (Borwein, 2011): $\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2-1}{4k^2}=\frac{2}{\pi}$ Fue usada su serie infinita por Osler para realizar su productoria para aproximar el valor de $\frac{2}{\pi}$ (Arndt & Haenel, 2000) A Walis también se le atribuye esta serie publicada en su *Arithmetica Infinitorium:* $\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10}\ldots$ (Posamentier & Lehmann, A Biography of the World's Most Mysterious Number, 2004)**.** **Cálculo directo de π.**	Se puede interpretar la manera como llegó a su resultado como se muestra en (Arndt & Haenel, 2000, p.163)
$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$	1674	Leibniz - Gregory	Es de importancia histórica el trabajo que realiza James Gregory, el cual establece las primeras series para arcotangente, escritas en una carta. Pero fue Leibnitz quien sustituyó un valor en las series de Gregory para obtener $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\ldots$ Leibnitz llegó a este resultado independiente de Gregory, y lo citó en cartas que mostró a muchos amigos suyos en cartas. (Arndt & Haenel, 2000).	(Arndt & Haenel, 2000, p. 188)

			Esta es una aproximación ‘débil’ a pesar de su genialidad, ya que se requiere tomar cien mil millones de términos para obtener cinco decimales correctos de π. (Posamentier & Lehmann, A Biography of the World's Most Mysterious Number, 2004). **Cálculo directo de π**	
70 cifras decimales	1699	Abraham Sharp	Fue la primera persona (Arndt & Haenel, 2000) en usar las series de Gregory para obtener un valor aproximado de π, obteniendo, 40 años después del trabajo de Gregory, un cálculo del número π con 71 cifras decimales correctas. Se describe como el récord a la primera aproximación que no se basa en el método de polígonos de Arquímedes.	(Arndt & Haenel, 2000, p. 189)
200 Cifras decimales	1824	Dase	En 1840, el llamado ‘famoso computador mental’ Zacharías Dase escoge la siguiente fórmula arcotangente que no converge tan bien como la de Machin, pero le permitió, trabajando con lápiz y papel, 200 cifras decimales correctos de π: $$\frac{1}{4}\pi = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$$ (Arndt & Haenel, 2000). **Cálculo directo de π**	
$\frac{1}{\pi}$	1914	Rammanujan	Nuevos tipos de fórmulas de series infinitas, basadas en aproximaciones de integrales elípticas. Una de las series es (Borwein, 2011): $$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!\,(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$ Esta fórmula es mucho más sencilla de calcular $\sqrt[4]{\mathbf{9^2} + \frac{\mathbf{19^2}}{\mathbf{22}}} =$	(Arndt & Haenel, 2000, p. 103)

			$\mathbf{81+\frac{361}{22}}^{\mathbf{1/4}} = \mathbf{\frac{2143}{22}}^{\mathbf{1/4}} = \mathbf{3.141592652...}$ Aunque solo es correcta en sus 8 primeros decimales. (Posamentier & Lehmann, A Biography of the World's Most Mysterious Number, 2004). A la edad de 27 años, en su ensayo *ecuaciones modulares y aproximaciones de π* contiene cerca de 30 fórmulas para π, incluyendo la siguiente: $$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{1103}{99^2} + \frac{27493}{99^6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{4^2} + \frac{53883}{99^{10}}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4^2\cdot 8^2} + \cdots$$ Él mismo comenta que esta serie converge "extremadamente rápido", y tenía razón ya que cada sumando produce al menos 8 decimales correctos del número pi. (Arndt & Haenel, 2000) **Cálculo directo de $\boldsymbol{\pi}$.**	
2037 Dígitos	1949	ENIAC	En Junio del año 1949, G.W. Reitweisner Von Neumann, y sus colaboradores idearon un programa para el cálculo del número π, utilizando el arcotangente de la fórmula de Machin: $$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$ Con ella, el Eniac tardó 70 horas en calcular 2037 dígitos del número π. **Cálculo directo de $\boldsymbol{\pi}$.**	(Arndt & Haenel, 2000) (Gourdon & Sebah, 2010) (Anónimo, s. f.)

Durante la elaboración del cuadro y la información recolectada para completarlo, se notaron algunos aspectos de la "génesis" de π, que más adelante serán expuestos a profundidad, por ejemplo, antes del siglo XVI, se llegaba a deducir π a través del trabajo con el área y el perímetro de la circunferencia por diversos métodos como los mostrados por los Babilonios y los Egipcios, pero se encontró información realizada por otras personas, y lugares no mencionados como India y otros trabajos realizados por los Chinos, que no contempla el vídeo; inferimos con base en esto, que en el vídeo se ignora trabajo que se realizó en Oriente, que por su producción, debe tener la misma importancia histórica que lo descubierto y desarrollado en occidente.

También se le atribuye a Arquímedes el primer acotamiento del número π, dando certeza sobre un intervalo en el cual se encontraba el valor de este número, pero se deja atrás algunas personas que, de la misma manera que trabajó Arquímedes, brindan su propia aproximación a π.

A partir del XVI, se concluye, a partir de la información en el cuadro 1, el número π pasa a ser objeto de estudio, es decir, los trabajos apuntan a encontrar la mayor cantidad de cifras de π. Siendo el número en cuestión objeto de estudio, se encuentra con Van Ceulen como la última persona en realizar el cálculo de él utilizando polígonos y salen a relucir las series, por ejemplo, James Gregory es uno de los primeros en establecer, series para arco tangente que más adelante serían de utilidad para el cálculo de π utilizando máquinas, junto con el trabajo de Jhon Machin y su fórmula; toda esta información no se contempla en el vídeo, es más, era una enorme inquietud para los que realizaban este trabajo cómo fue que se realizó el cálculo de π con estas grandes máquinas, pero todo está detrás de la tecnología de la máquina (problema que no compete a este trabajo) y las series de Jhon Machin y demás autores que realizaron series de arco tangente.

Lo anterior es una descripción *grosso modo* de lo que se pudo evidenciar en la elaboración del cuadro 1, y serán ampliados en los siguientes dos capítulos, los cuales se tendrá como argumentos dos situaciones gruesas que fueron evidentes: π como resultado de otro objeto de estudio (perímetro, área de circunferencia) y el punto en que la humanidad toma a π como objeto de estudio, cuando se comenzaron a realizar trabajos para hallar la mayor cantidad de cifras del número π.

Capítulo 3

π Como instrumento de estudio

A lo largo de este capítulo se mostrará el trabajo realizado por algunas civilizaciones o personas que centraron sus investigaciones en un objeto matemático particular, o en la solución de un problema concreto y en este proceso surgieron representaciones y aproximaciones del número π.

Para ello la información estará organizada de forma cronológica como se muestra en el cuadro 1 del capítulo dos. Así que se iniciará con los estudios más antiguos en la historia de π, hasta donde se analizó, correspondientes a los babilonios (1900 a. C.) y finalmente en el trabajo de Leonardo da Vinci (1452) dado que es en ese periodo de tiempo que π juega el papel de herramienta para solución de problemas o necesidades.

En este capítulo se muestran algunas civilizaciones entre ellas los egipcios, los indios y los babilonios y por otro lado se expone el trabajo de algunos personajes como Arquímedes, Tolomeo y Brahmagupta, entre otros, dado que estas personas se destacaron por sus aportes al descubrimiento y aproximación del número π.

Babilonia

Babilonia se encontraba ubicada al centro-sur de Mesopotamia, actualmente a 90Km hacia el sur de Bagdad, Iraq. Para comprender mejor su ubicación geográfica, se muestra el siguiente mapa:

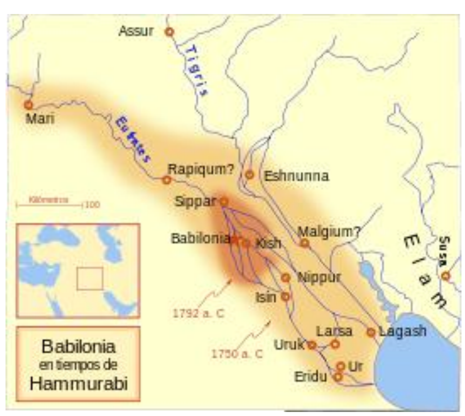

Imagen 3.1 Ubicación geográfica de Babilonia. Tomado de: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/72/Babilonia_de_Hammurabi-ES.svg/270px-Babilonia_de_Hammurabi-ES.svg.png.

Allí plasman un año crucial para Babilonia, dado que a partir del año 1792 a. C., este imperio se posicionó a nivel político y se convirtió en una de las ciudades favoritas entre sus vecinos.

Ahora, centrando la atención en el campo de interés de este trabajo, los textos que han investigado la Historia de las matemáticas, en el caso particular de la Geometría, hablan que los babilonios se caracterizaron por su medición práctica y en su mayoría solo se estudió la medición de figuras planas y unos pocos sólidos.

Uno de los primeros problemas que ellos estudiaron fue el de hallar el perímetro de la circunferencia. Ellos la hallaban multiplicando su diámetro por 3. Es decir que para ellos, π era igual a 3.

En el libro *Historia de las matemáticas* de Jean Paul Collette en el 2002, se menciona que "un arqueólogo francés desenterró en Susa una tablilla en la que, mediante algunos cálculos, se llega a un valor de π igual a $3\frac{1}{8}$" (Collette, 2002, págs. 29, 30).

Los babilonios alrededor del año 1900 a. C. calcularon el valor de π, asimilando al área del círculo como un valor intermedio entre áreas de los cuadrados inscritos y circunscritos a él (Ver Imagen (3.2)). El valor que escogían era de $3r^2$, por tanto se daba el valor de $\pi = 3$ (Jiménez, págs. 46, 47) Pero no enuncian que no trabajaron con cualquier radio ya que este, debe medir uno.

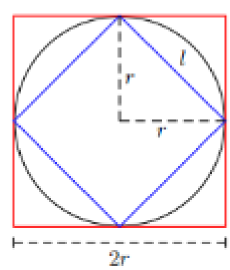

Imagen 3.2 Descripción del método utilizado por los babilonios de forma gráfica. Tomado de *El valor de π según los babilonios.*

La representación de π es gráfica o pictórica, dado que su interés primordial era el de hallar el diámetro de la circunferencia y utilizaron el método por exceso y por defecto como se mostró en la imagen 3.2.

En 1945 O. Neuguebauer afirmó que era muy pronto para los babilonios el hacer una generalización a π y aún más admitirla refiriéndose a la aproximación hecha por el arqueólogo francés, debido a que en ese momento no se tenía ninguna idea acerca de ese número y mucho menos de su existencia.

Otro de los problemas que estudiaron los babilonios fue el cálculo de volúmenes. Ellos también podían calcular volúmenes de prismas rectos y cilindros que se hallaban multiplicando el área de la base por la altura. Por ejemplo, "el volumen de un tronco cono, del que se conoce la altura h y el perímetro de las bases b y a, se calculan con la fórmula:

$$V = \frac{1}{2}h(b^2 + a^2) \tag{3.1}$$

Donde,

$$\frac{1}{12} \approx \frac{1}{4\pi}$$

Esta fórmula aproximada no da nunca la respuesta exacta; ocurre lo mismo cuando se calcula el volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada…" (Collette, 2002, págs. 29, 30).

Esto quiere decir que la manera como pasaron de la fórmula (3.1) a la igualdad que sigue no es evidenciada en sus escritos, sin embargo, tomaron el valor de π igual a tres, dado que

$$\frac{1}{12} \approx \frac{1}{4\pi} \approx \frac{1}{4 \cdot 3}$$

Las representaciones de π utilizadas en los volúmenes fueron de tipo gráfico o pictórico dado que su interés era hallar volúmenes de prismas y cilindros y se infiere que ese tipo de cálculos se hacían utilizando dichas figuras.

Luego de hacer una mirada al trabajo realizado por los babilonios, se llega a Egipto antiguo cuyo trabajo respecto a π se encuentra mencionado a continuación:

Egipto

La civilización egipcia existía desde el periodo pluvial es decir 120.000 años antes de la era actual. Su ubicación geográfica se encuentra a continuación:

Imagen 3.3 Ubicación geográfica de Egipto antiguo. Tomado de: http://3.bp.blogspot.com/-WtkPFbgLkxg/Td7pSaGQaVI/AAAAAAAABAQ/BgWAeWn4BHs/s1600/MAPA.png

Se ubicaba en el centro de dos desiertos y dos mares y según lo encontrado, Egipto y Babilonia se encontraban cerca, estando en el mismo continente, y divididos por Jordania.

Uno de los problemas a los que se enfrentaron los egipcios fue a la construcción de las pirámides, esta civilización es famosa por tener una de las grandes maravillas del mundo, las pirámides. Ellos medían distancias en “codos reales”, donde cada codo equivalía a 0,523 metros, en el caso particular de la pirámide de Keops, la base media 440 codos reales de largo y de 280 codos de altura exactamente. Ahora, si se toma dos veces la longitud de la base y se divide entre su altura se obtiene el valor 3,14297 lo cual es una aproximación muy buena en esa época para π, sin embargo, durante ese tiempo, π era igual a 3 para los babilonios y también para los egipcios, es decir esta aproximación duró implícita mucho tiempo hasta que los historiadores y científicos decidieron analizar la construcción de las pirámides.

Pero hay un interrogante respecto a la forma en que los egipcios medían distancias tan grandes para la construcción de las pirámides. Se puede inferir que lo hacían con cuerdas, pero éstas se podrían romper fácilmente y se debía tener mucha exactitud al momento de mantener tensionada la cuerda, cosa que ocasionaría que la cuerda pudiera romperse o estirarse, entonces ¿Cómo midieron? Se dice que utilizaban ruedas de un codo de diámetro y haciéndolas girar completamente y contando sus revoluciones (es decir, cada vuelta completa de la rueda), cada revolución mide 3.14 debido a la medición de la circunferencia, según su fórmula (en este apartado, se encuentra la forma como hallaban el área del circulo). Es allí donde π empieza a dejar su grano de arena en la construcción de las pirámides y con eso, se daría una mejor explicación para aquellas coincidencias anteriormente mencionadas. En lo anterior, se ve que π no era una preocupación sino más bien una necesidad para llevar a cabo la construcción de las pirámides, sin embargo, las aproximaciones que se hallan inmersas en las pirámides no eran explícitas en esa época, sino más bien se encontraba "escondido" en la medición para llevar a cabo dicha construcción.

Las representaciones utilizadas en este problema abordado por los egipcios son concretas, dado que π se encuentra implícito en la longitud de las pirámides y en su construcción, ya que los egipcios al proponer que "si se toma dos veces la longitud de la base y se divide entre su altura se obtiene el valor 3,14297" la cual, es una muy buena aproximación de π en relación con la aproximación que brindan los babilonios, sin embargo, esta aproximación sale a la luz, luego de que los científicos e historiadores estudiaron la construcción de las pirámides, es decir, los egipcios no descubrieron dicha aproximación en esa época y mucho menos la analizaron, según lo consultado.

Es por esas "coincidencias" que nacen algunos mitos acerca del diseño de las pirámides como por ejemplo que fueron diseñadas por una entidad superior, aunque los científicos no aceptan dichos mitos, no se ha dado una explicación mejor a esta coincidencia; incluso, hay pirámides con la misma propiedad, pero el resultado de esas operaciones entre la base y la altura es más aproximado al valor de π, entonces quizás no se trate de simples coincidencias.

Otro problema al que se enfrentaron los egipcios se encuentra en que la preocupación de esta civilización, en el estudio de la geometría, fue similar al estudio realizado por los babilonios de encontrar áreas de figuras planas, por ejemplo, para el caso del triángulo isósceles decían que su área se obtiene multiplicando la mitad del producto entre la base y la altura, aclarando que ellos no conocían el teorema de Pitágoras en ese entonces.

Uno de los problemas más famosos en Egipto dice lo siguiente: *Se tiene un campo circular de 9 khets de diámetro. ¿Cuál es su área?.*

La solución y la aproximación que proponen los egipcios según este problema, se evidencia en el documento *Las medidas a través de la historia* de Jordi Deulofeu y Lourdes Figueiras del año 2002 donde muestran:

"Como solución, se propone restar $\frac{1}{9}$ al diámetro y elevar el resultado al cuadrado; así que la solución buscada es 64 unidades de área (khets cuadrados). En términos generales, la aproximación que sugieren sigue la regla:

$$Superficie = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 - \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2 \qquad (3.2)$$

La aproximación llevada a cabo en este problema está ligada a un circulo de diámetro determinador (9 *khets*) y tal como aparece resuelto en el papiro no proporciona un método de cálculo general que nos permita encontrar el área de un círculo cualquiera. (Deulofeu & Figueiras, 2002, págs. 46, 47)".

Sin embargo, Collette (2002) muestra que sí tienen una manera de hacer esos cálculos, la cual irónicamente se encuentra relacionada con la solución del problema, expuesto por Jordi Deulofeu y Lourdes Figueiras (2002).

A continuación se evidenciará el método utilizado por los egipcios para calcular el área del círculo, Collette muestra: Para el área del círculo

"Se obtiene aplicando un cuadrado cuyo lado es igual a $\frac{8}{9}$ de la longitud del diámetro. Así el valor de π es $3\frac{1}{6}$. Varias Interpretaciones tratan de explicar el origen de este valor de π. He aquí una que parece satisfacer a los historiadores:

A partir de un cuadrado cuyo lado mide 9 unidades, se construye un octágono de tal manera que el área de cada uno de los triángulos isósceles de las esquinas sea $4\frac{1}{2}$ unidades.

Área del cuadrado = 81

Área del octógono = Área del cuadrado – Áreas de cada uno de los triángulos.

= 81 – 18

= 63 (lo que es casi el área de un cuadrado de lado 7).

Puesto que el área del octógono difiere poco de la del círculo inscrito en este cuadro, el área del círculo será igual a

$$\frac{8}{9}d^{\ 2}, \text{ó } \frac{16}{9}^{\ 2} r^2 = \pi r^2, \tag{3.3}$$

Donde $\pi = \frac{16}{9}^{\ 2}$ o $3\frac{1}{6}$ “(Collette, 2002, p. 58).

Para entender lo anterior ver la imagen 3.4 que muestra la solución geométricamente:

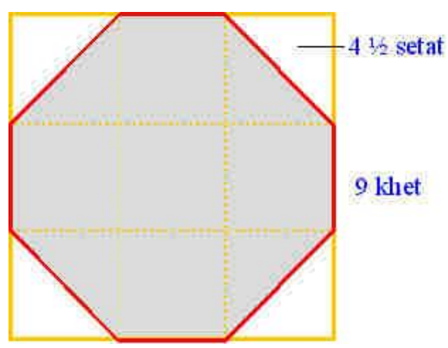

Imagen 3.4 Solución geométrica del método hindú. Tomado de: http://personal.us.es/cmaza/egipto/circulo3.JPG

Finalmente se evidencia que la fórmula a la que se llega a la solución del problema, es la misma, que se encuentra en lo mostrado por Collette, su diferencia es que la última de las fórmulas es más general, dado que se da en términos de π, se aclara que la mostrada por Deulofeu, se acerca más a lo realizado por los egipcios.

Las representaciones de π encontradas en este problema se hallan en la circunferencia aunque también hacen cálculos (manualmente) debido a que las representaciones encontradas son gráficas y simbólicas.

Luego de pasar una mirada por dos de las civilizaciones más antiguas, se mostrará el trabajo de la India, donde algunos de los problemas abordados son por necesidades a nivel de creencias y otros fueron abordados por cuestiones o académicas o para suplir necesidades a nivel cultural.

India

Esta civilización inicia aproximadamente hacia el siglo XXV a. C. se encuentra entre China y Pakistán. Las dos siguientes imágenes muestran el desarrollo y la extensión geográfica que ha tenido la India.

Imagen 3.5 Ubicación geográfica de la India antigua. Tomado de: https://lh4.googleusercontent.com/-WuSRGgpn8o/TYvl3ZoznVI/AAAAAAAAAAU/CxOxwelqVsA/s1600/Dibujo2.bmp

Imagen 3.6 Ubicación geográfica actual de la India. Tomado de: http://www.sabelotodo.org/arquitectura/imagenes/india.jpg

Es evidente el gran progreso que ha hecho esta civilización a lo largo de la historia con el simple hecho de su extensión geográfica. En la India antigua, alrededor del año 600 a. C. se evidencia el uso y la creación de los Sulbasutras, que son el apéndice de un libro llamado Vedas, muy sagrado para la cultura y la religión en la India, en ellos se plantean normas para la construcción de los altares en los que se hacían los sacrificios, dado que esas medidas debían ser muy exactas de lo contrario el sacrificio no tendría éxito. Es por ello que las matemáticas se veían estrechamente relacionadas con esta cultura, dado que su interés principal era mantener a sus dioses contentos para que les proporcionaran comida, salud, bienestar, entre otros y si sus sacrificios no eran exitosos los dioses se enfadarían y los castigarían.

Es en los Sulbasutras que se encuentran todas las matemáticas que se tenían para aquella época. De ellos, solo dos se consideraron importantes, estos son: el Sulbasutra de Baudhayana y el Sulbasutra de Apastamba, en estos dos, se encuentra el teorema de Pitágoras, claro está que no se menciona como actualmente es conocido. En estos dos escritos, se evidencia uno de los problemas que quisieron abordar los indios, respecto a la cuadratura del círculo y del procedimiento contrario, es allí donde sale una aproximación de π, pero esta aproximación no es única, dado que como hacían construcciones a mano y abordaban distintas situaciones problema, las aproximaciones de π variaban.

En un artículo de *O'Connor y E F Robertson* llamado *Los Sulbasutras de la India* en el año 2007 se menciona a grandes rasgos el método que utilizaron los indios para la cuadratura del círculo y la aproximación (o aproximaciones) de π a las que llegaron: "Todos los Sulbasutras contienen un método para la cuadratura del círculo. Es un método aproximado basado en la construcción de un cuadrado de lado $\frac{13}{15}$ veces el lado del diámetro de un círculo dado. […] Esto se corresponde con tomar:

$$\pi = 4 \cdot (\frac{13}{15})^2 = \frac{676}{225} = 3.00444$$

Que no es una aproximación tan cercana, dado que como se ha mencionado en lo trabajado por los egipcios y los babilonios, ellos ya tenían aproximaciones más cercanas que 3.00444.

Esta forma de solución corresponde a la siguiente ilustración:

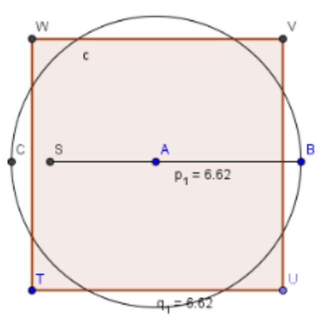

Imagen 3.7 Construcción geométrica del método para la cuadratura del círculo por parte de los hindúes.

En el Sulbasutra de Baudhayana aparece la aproximación anteriormente mencionada, pero también aparecen las siguientes: $\frac{900}{289} = 3.1141 \ldots$ y $\frac{1156}{361} = 3.2022 \ldots$ La mejor aproximación encontrada en los Sulbasutras se encuentra en el de Manava con $\pi = \frac{25}{8} = 3.125$.

Las representaciones encontradas en la India corresponden a las gráficas, ya que, como se mencionó anteriormente, sus aproximaciones variaban respecto a las situaciones problema que trabajaban. Es por ello que surgieron varias aproximaciones de la misma. Aunque la más popular corresponde a 3.00444 dado que se dio, por el método para encontrar la cuadratura del círculo.

Luego del trabajo de los indios, se expondrá el trabajo de un matemático famoso por su trascendencia en los estudios que realizó durante su vida, se trata de Arquímedes, un griego cuyo trabajo con π fue más allá de una aproximación sino que hizo una acotación a través de un método creado por él.

Arquímedes

Inicialmente se mostrará algo de la vida de Arquímedes de manera que el lector se contextualice un poco en la vida de este personaje. Para ello en el libro *Las preguntas de Arquímedes* de Mario Dalcín y Mónica Olave del año 2013 se condensan varios de los trabajos realizados por este gran personaje y un poco acerca de su vida.

Arquímedes nació en el año 287 a. C. en Siracusa, una de las ciudades más importante en Grecia. Su padre, Fidias, fue discípulo de Platón quien por varios años estuvo en Siracusa educando a varios hombres y de ahí se fue creando una comunidad de cultos, entre ellos el padre de Arquímedes. Luego viajó a Alejandría y se educó junto a Conón de Samos y fue compañero de Eratóstenes quien fue el primer en dar un cálculo preciso de la circunferencia terrestre. De otro lado, se afirma que en uno de los viajes de Arquímedes, fue ingeniero militar del rey Eclidérides de Cilodastri durante una guerra marítima. Allí hizo varios inventos como una máquina que disparaba un alquitrán en llamas, el tornillo de Arquímedes (que extraía agua del rio Tinto) y otros más. Y debido a ello ha sido su fama ya que tuvo un excelente desempeño en sus diferentes áreas de trabajo. (Olave & Dalcín, págs. 23-40).

Imagen 3.8 Ubicación geográfica de Grecia antigua. Tomado de: http://www.elaceite.net/wp-content/uploads/mapa_grecia.gif

Este pequeño fragmento muestra que Arquímedes se relacionaba con diferentes matemáticos que hicieron historia en el mundo de esta ciencia como lo fue Eratóstenes, o también su padre, que fue otro astrónomo y matemático grande llamado Fidias educado por Platón alrededor del año 350 a. C.

Ahora, dejando de lado las generalidades de la vida de Arquímedes, se expondrá el trabajo realizado por él con el número del interés de este trabajo π.

Así como en los babilonios y en los egipcios se trabajó la medida de la circunferencia, Arquímedes también trabaja sobre el mismo problema, dado que su interés es buscar la relación que hay entre el radio de la circunferencia y su diámetro y ello lo hace a través de su método hallando el perímetro de la circunferencia.

Así que su intensión recae en hallar la medida de la circunferencia y de allí surge π. Inicialmente la calcula con un hexágono inscrito y un hexágono circunscrito estando seguro de que el perímetro de la circunferencia está entre el perímetro de esos dos hexágonos. Luego empieza a duplicar los lados de los hexágonos hasta llegar a polígonos de 96 lados.

En el libro *A Biography of the world's Most Mysterious Number* de Alfred Posamentier y Ingmar Lehmann del año 2004 muestran el método que Arquímedes utilizó para encontrar el perímetro del círculo, los autores de este trabajo de grado tradujeron ese fragmento para compartirlo en esta sesión:

"Tomemos el hexágono como nuestro ejemplo de "polígono regular". A partir de esto, entonces vamos a generalizar a los polígonos de muchos más (o menos) lados.Comenzamos con un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$. La medida del $\angle AOB$ es una sexta parte de la revolución completa 360°, o 60°. Ya que $OK \perp AB$ y $K, BK = AK = a$.

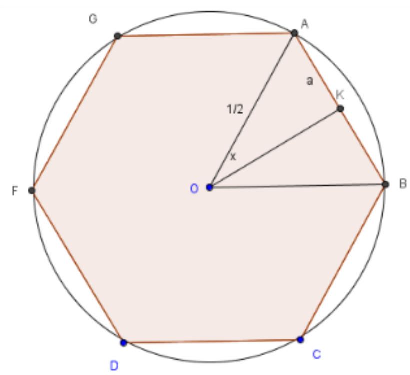

Imagen 3.9 Circunferencia con Hexágono inscrito.

Buscamos encontrar el perímetro del hexágono, cuando sabemos la longitud del radio ($\frac{1}{2}$) y la medida de

$$\angle AOK = \frac{1}{2}\ 60° \ = 30°$$

Usando la función trigonométrica Seno,[2] obtenemos:

$$\angle AOK = sen\ 30° = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a$$

Ya que el $sen\ 30° = \frac{1}{2}$ y además $2a = \frac{1}{2}$, y $a = \frac{1}{4}$. El perímetro del hexágono es entonces 12 veces a, que es igual a 3.

[2] La función seno se define para un triángulo rectángulo como la relación entre el lado opuesto al ángulo en cuestión y la hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto).

Vamos a generalizar esto para cualquier polígono regular de lados n.

$$\angle x = \frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}$$

Por lo tanto, para el polígono regular general de n lados:

$$sen \frac{180°}{n} = 2a$$

El perímetro del polígono regular de n-lados es entonces n veces $2a$, lo que hace de este perímetro igual a:

$$n\ sen\ \frac{180°}{n} \qquad (3.3)$$

Entonces podemos tomar varios valores de n y calcular el perímetro del polígono regular cuya circunferencia circunscrita tiene un radio de $\frac{1}{2}$." (Posamentier & Lehmann, 2004, pp. 80-83).

Ahora, se mostrará el método de Arquímedes, utilizando ahora un polígono regular circunscrito a la circunferencia.

"[…] Ahora repetiremos el ejercicio anterior con el polígono circunscrito al círculo, o, dicho de otra manera, donde el círculo de radio $\frac{1}{2}$ está inscrito en el polígono. […] Esta vez vamos a considerar un pentágono regular circunscrito en nuestro círculo de radio $\frac{1}{2}$ como nuestro primer polígono a estudiar. A continuación vamos a generalizar nuestro procedimiento y extenderlo a otros más.

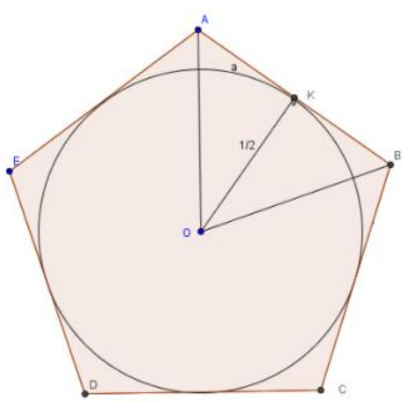

Imagen 3.10 Circunferencia con Hexágono circunscrito.

Nuestro objetivo es encontrar el perímetro del pentágono de lado $2a$. Lo sabemos, dado que:

$$\tan \angle AOK = \frac{a}{OK} \text{ y } m\angle AOB = 72°$$

De[3] modo que[4]

$$m\angle AOK = 36° \text{ Y bien, } OK = \frac{1}{2}$$

Y por consiguiente:

$$a = \frac{1}{2}\tan 36° \approx \frac{1}{2}\ \ 0.72654252800536088589546675748062$$
$$= 0.36327126400268044294773337874031$$

Así, el perímetro del pentágono es 10 veces a, o alrededor de 3,63271264002680442947733378740031todavía no una aproximación muy cercana π. La circunferencia del círculo es $2\pi r = 2\pi\ \ \frac{1}{2}\ \ = \pi$.

En el caso general para un polígono de n lados se tiene:

$$m\angle AOK = \frac{1}{2}\cdot\frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}$$

Para el ejemplo del pentágono: $\tan\angle AOK = \frac{a}{OK}$ Resulta que:

$$a = OK\cdot\tan\angle AOK = \frac{1}{2}\cdot\tan\frac{180°}{n}$$

El perímetro del polígono, es entonces:

$$n\cdot 2a = n\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\tan\frac{180°}{n} = n\tan\frac{180°}{n} \qquad \text{(3.4)”}$$

(Posamentier & Lehmann, 2004, págs. 87, 88).

Para llegar a una aproximación, Arquímedes no hace tantos cálculos, sino que inició con hexágonos e iba duplicando el número de lados de los polígonos. Cabe aclarar que estas expresiones algebraicas están en la notación usual dado que Arquímedes tenía otros convenios para su escritura no tan conocidos.

A pesar de que sus cálculos no fueron tan precisos Arquímedes llegó a acotar el valor de π entre $3\frac{10}{71}$ y $3\frac{1}{7}$. Escrito simbólicamente se vería así: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$

[3] La función tangente se define para un triángulo rectángulo como la relación entre el lado opuesto al ángulo que se considera y el lado adyacente a este ángulo.
[4] Ya que al igual, que en el procedimiento anterior, el ángulo AOB era 60° por ser la sexta parte de 360° en este caso, será de 72° por ser la quinta parte de 360°.

La manera como Arquímedes calculó el valor de las funciones trigonométricas para llegar a la acotación de π no se conoce, solo se infiere que a pesar de la falta de precisión fue una muy buena aproximación al valor de π.

Lo mostrado anteriormente corresponde al método de Arquímedes, famoso por su trascendencia, ya que matemáticos como Vieté cuyos trabajos datan en el año 1579 aproximadamente, donde se evidencia el gran periodo de tiempo en el que se siguió utilizando el método, posteriormente se hará referencia al trabajo con π de este matemático, y Van Ceulen del año 1596 es la última persona en utilizar el método arquimediano para calcular el área de un círculo con un polígono de 2^{62} lados. Allí se muestra el aporte tan significativo que hizo Arquímedes en el cálculo más aproximado para π a través de los años.

Las representaciones de π evidenciadas son pictóricas y simbólicas, dado que para hacer sus primeros cálculos utilizó la geometría para construir los polígonos regulares inscritos y circunscritos a la circunferencia. Pero al momento de hacer una generalización de su método, optó por utilizar los signos matemáticos.

En la civilización griega de esta época, no se encuentran más trabajos de otros personajes de este país en los libros de historia consultados.

China

China ha sido uno de los países con más antigüedad y desarrollo desde antes de la era actual. Su ubicación se encuentra en Asía junto a la India, pero a pesar de que son países vecinos, China demoró aproximadamente 400 años más que India en descubrir un valor aproximado para π. Claro está, que esta inferencia se hace bajo los contenidos encontrados en algunos libros de Historia de las matemáticas.

Igual que la India, el progreso a nivel geográfico de China se ha desarrollado notablemente, es por ello que se muestran dos mapas que evidencian ese suceso.

Imagen 3.11 Ubicación geográfica de China antigua. Tomado de: http://socialesvi.bligoo.com/media/users/22/1138876/images/public/310836/china.png?v=1347743666864

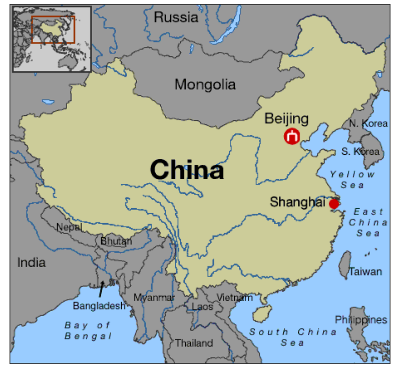

Imagen 3.12 Ubicación geográfica de China en la actualidad. Tomado de: http://www.aqualia-infraestructuras.es/media/fotos/Shanghai.gif

Se reitera el notorio progreso que ha tenido China a lo largo de su historia.

Uno de los problemas a los que se enfrentó el Imperio Chino, fue el de determinar una medida estándar para su país, así que cuando Wang Mang llegó al poder, luego de la dinastía Han occidental, él mismo, le pidió a uno de los astrónomos experto Liu Xin en el año 216 a. C. que generara una medida para su imperio. Así que creó un recipiente cilíndrico de Bronce del cual se copiaron alrededor de 100 y se distribuyeron por todo el país.

Lo que analizaron los historiadores fue que el diámetro de ese cilindro, creado por Xin, pudo tener una aproximación para π mejor que 3, el cual pudo ser: 3.1547, siendo una de las mejores aproximaciones para π hasta el momento. (Arndt & Haenel, 2000).

Las representaciones de π que se encuentran en la solución del problema, son concretas dado que su aproximación se debe a la construcción de un recipiente cilíndrico de bronce que contiene la medida estándar del imperio chino en esa época.

Sin embargo no se conoce la manera exacta como Liu Xin realizó la construcción de dicho cilindro.

Otro de los problemas trabajados por los chinos, fue el de hallar una relación entre el área del cuadrado y el área del círculo inscrito en él. Para ello, Zhang Heng hizo una mejor aproximación para π con la solución para ese problema, teniendo en cuenta que la relación entre el área del cuadrado y el área del círculo era $4:3$. De forma análoga, calcula la relación entre el área de un cubo y el área de una esfera expresándolo así: $4^2:3^2 = 16:9$. Pero se dio cuenta que dicho valor era muy grande así que lo corrigió como: $8:5$ y teniendo en cuenta ello, entonces aplicó raíz cuadrada para calcular la relación entre el área del cuadrado y del círculo así: $\sqrt{8}:\sqrt{5}$. Y de allí calculó π igual a:

$$\sqrt{10} = 3.1622\ldots \tag{3.5}$$

Siendo una buena aproximación (Arndt & Haenel, 2000).

Las representaciones de π obtenidas del resultado del trabajo con ese problema son geométricas dado que las construcciones que empleó Zhang Heng para la solución de ese problema tuvieron en cuenta la relación entre áreas del cuadrado y del círculo; y también se encuentran representaciones simbólicas dadas las razones que halla y la manera cómo encuentra el valor aproximado de π siendo el resultado de la raíz cuadrada de diez.
Luego de este pequeño fragmento del trabajo de dos personajes en la antigua China, se encuentra otro astrónomo que llegó a hacer una aproximación para π, él es Tolomeo.

Tolomeo

Claudio Ptolomeo nació en Alejandría en el año 85 y murió en el año 165 aproximadamente. Fue astrónomo, geógrafo y matemático griego. Se caracterizó por sus grandes contribuciones en la astronomía. Lastimosamente lo poco que se conoce de Tolomeo se debe a las obras que él mismo realizó, dado que no se encuentra casi que nada acerca de su vida.

Uno de los principales trabajos de Tolomeo del año 125 fue su escrito *Almagesto* el cual contiene elementos importantes de trigonometría y astronomía. En el *Almagesto* se encuentra una aproximación a π que consistió en la división de un círculo en 360° y el diámetro del mismo en 120 partes (se supone que dichas partes debieron ser iguales) luego, cada una de esas partes la dividió en minutos, segundos y terceros, teniendo en cuenta el sistema sexagesimal de los babilonios. Así que afirmo que la razón entre la circunferencia y su diámetro era 3°8’30”, expresándolo de otra forma (Collette, 2002):

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3{,}14166 \qquad (3.6)$$

Sin embargo, la manera como encontró esos cálculos está consignada (seguramente) en sus obras.

Una de las representaciones encontradas en el trabajo de Tolomeo es de tipo gráfico dado que utiliza el círculo y su diámetro para llegar a su aproximación. Y la otra representación mostrada es la simbólica como se muestra en la igual 3.6. Luego de la intervención de Tolomeo, aparecen nuevamente los chinos con nuevas aproximaciones a π a través del estudio de otros problemas.

China

En el año 217, uno de los personajes cuya información es verdaderamente escasa es Wang Fang de quien solamente se conoce su aproximación a π a través de la construcción de una circunferencia cuyo diámetro era igual a $\frac{142}{45}$ que es igual a 3.155 siendo esa su posible aproximación.

Dada la poca información se infiere que la representación de π que se encuentra es gráfica, dada la construcción que tuvo que hacer Fang para hallar una circunferencia con dicho diámetro.

En el año 263 llega un matemático llamado Liu Hui el cuál hace un cálculo sistematizado para hallar el área de la circunferencia. Es decir, que el problema en el que centra su atención es en el cálculo del área de la circunferencia.

La manera como procede a hacer el cálculo del área se encuentra explicada en el libro *Pi-Unleashed* escrito por Jörg Arndt y Christoph Haenel en el año 2000, este libro está escrito en Inglés, pero los autores de este trabajo lo tradujeron al español para que el lector pueda contextualizarse en la solución de dicho problema:

Empezó con un círculo de radio 10 y, usando el teorema de Pitágoras, calculó las áreas de los polígonos inscritos empezando por el hexágono y procediendo hacia arriba hasta polígonos de 192 lados. Su cálculo terminó con la siguiente desigualdad:

$$314\frac{64}{625} = A_{192} < A < A_{96} + 2\ A_{192} - A_{96}\ = 314\frac{169}{625} \tag{3.7}$$

Aquí, A se refiere al área del círculo y A_n es el área de un polígono inscrito con n lados.

Liu Hui obtuvo su límite superior del polígono inscrito con el doble del número de lados, a diferencia de Arquímedes que habían obtenido su límite superior del polígono circunscrito con el mismo número de lados. La expresión $2\ A_{2n} - A_n$ significa n veces rectángulo $AEFC$

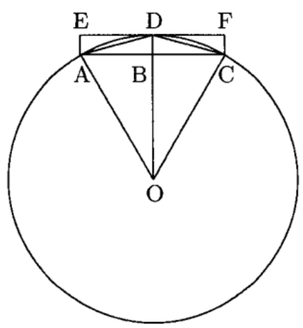

Imagen 3.13 Construcción de Liu Hui para hallar el área de la circunferencia. Tomado de: *Pi-Unleashed* (2000).

Al final de su cálculo Liu Hui entonces estableció la siguiente aproximación de sus dos límites, que se diferencian por $\frac{105}{625}$;

$$A \approx A_{192} + \frac{36}{625} \tag{3.8}$$

A partir de esto, llegó a la siguiente aproximación para π

$$\pi \approx \frac{314 + \frac{4}{25}}{10^2} = 3.1416 \tag{3.9}$$

Liu Hui no dio ninguna justificación para la relación (3.8), así que solamente se puede inferir la manera en como llegó a ella. Por sentido común, se sabe que el valor que Liu buscaba estaba más cerca de la construcción con un polígono de 192 lados que el de 96 lados. Así, que calcula la media ponderada haciendo la diferencia:

$$169 - 64 = 105$$

Y dividiendo su resultado por 3, y ello dio lugar a la aproximación $314 + 99/625$. Sin embargo, este matemático no se encontraba satisfecho dado que para él era mucho más sencillo manejar $\frac{100}{625}$ que $\frac{99}{625}$ dado que al simplificar se reduciría a simplemente $\frac{4}{25}$, ello dio pie para que lograra culminar la fórmula (3.9).

Las representaciones de π encontradas son evidentemente las mismas que utilizó Arquímedes, dado que los procedimientos que siguieron son, en muchos aspectos, muy similares. Es decir que las representaciones son de tipo gráfico, inicialmente para llevar a cabo la construcción que Liu muestra con el uso de rectángulos y finalmente al momento de escribir su fórmula (3.9) utiliza una representación simbólica.

En lo que se lleva del trabajo, se podría decir que el método utilizado por Liu Hui es similar al método mostrado por Arquímedes. Ambos llegaron a hacer un acotamiento a partir de la construcción de polígonos, en el caso de Arquímedes fueron hasta 96 lados y en este caso fue hasta 192 lados, lo cual dice que Liu llegó a hacer un mejor acotamiento. Sin embargo, a ambos se les atribuye que fueron los únicos matemáticos de la historia que lograron hacer un acotamiento de π.

Pero, una de las diferencias más importantes entre los métodos utilizados por ellos, fue que Arquímedes calculó el perímetro de la circunferencia, mientras que Liu quiso calcular el área de la misma.

Otro trabajo realizado por los Chinos fue autoría del matemático Tsu Ch'ung-Chih y su hijo donde llegan a hacer un nuevo acotamiento que comprende expresado de la siguiente forma:

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

Se infiere que este matemático utiliza el método de Liu Hui para hallar este acotamiento y llega a afirmar que $\frac{22}{7}$ es una aproximación menos exacta que $\frac{355}{113}$.

La representación de π que se infiere es gráfica, dado que utilizó (probablemente) su acotamiento a través del método de Liu que inicialmente es a través de construcciones geométricas. Luego de ello, se presentan representaciones de tipo simbólico para finalmente acotar el valor de π entre esos dos valores. Luego del arduo trabajo de los chinos, la India vuelve a hacer un aporte con un matemático llamado Aryabhata.

Aryabhata

Aryabhata fue un matemático y astrónomo indio cuyos trabajos datan en el año 499. No se conoce mucho acerca de su vida, pero sí se conocen algunas de las cosas en las que trabajó como trigonometría, ecuaciones indeterminadas, astronomía (movimiento del sistema solar) y también hizo un cálculo para hallar una aproximación para π. También, al igual que Tolomeo, realizó una obra acerca de las matemáticas a la que llamó *Aryabhatiya* la cual se divide en cuatro partes que son: Armonías celestes, Elementos de cálculo, Del tiempo y su medición y Las esferas.

En cuanto a la aproximación que hizo para π es probable que él incluso haya descubierto que π era irracional, pero ello es solo una suposición. En el documento *La matemática de la India* de José Sánchez donde se encuentra explícito el enunciado de la fórmula que permite dar la aproximación para π:

En la segunda parte de *Aryabhatiya* está expresado lo siguiente:

caturadhikam śatamaṣ ṭ aguṇ am dvāṣ aṣ ṭ istathā sahasrāṇ ām
ayutadvayaviṣ kambhasyāsanno vṛ ttapariṇ āha

Lo cual traduce:

"Añada cuatro a 100, multiplíquelo por ocho, y entonces añada 62 000. Mediante esta regla la circunferencia de un círculo con un diámetro de 20 000 puede ser aproximado."

Es decir:

$$\frac{(\ 100 + 4\ \ \cdot 8) + 62000}{20000} = 3.1416 \qquad (3.10)$$

Que fue la aproximación a la que logró llegar Aryabhata. Sin embargo, esa aproximación fue la misma a la que logró llegar Tolomeo, ello podría llevar a pensar que Aryabhata se encontraba influenciado por sus antecesores griegos.

La representación de π encontrada es simbólica dada la manera como expresa ese enunciado, pero también de ahí, se infiere que tuvo que utilizar las representaciones geométricas inicialmente.

Luego del trabajo de Aryabhata, llega un matemático célebre hindú quien también encuentra algunas curiosidades o generalidades acerca de π.

Brahmagupta

Brahmagupta, fue el más grande de los matemáticos hindúes alrededor del año 598. Él se encuentra fascinado ya que descubrió que los perímetros de los polígonos regulares de 12, 24, 48 y 96 con diámetro 10 eran $\overline{965}$, $\overline{981}$, $\overline{986}$ y $\overline{987}$ donde concluye que si se duplica el número de lados el perímetro tendería a ser $\overline{1000}$ usando ese argumento alrededor del año 650 llegó a deducir que:

$$\pi = \frac{\overline{1000}}{10} = \overline{10} = 3.16227 \qquad (3.11)$$

Siendo esta su aproximación para π. (Arndt & Haenel, 2000).

Las representaciones allí expuestas son de tipo gráfico y simbólico, dado que utiliza inicialmente polígonos y luego halla una generalidad entre sus resultados.

A pesar de que su aproximación no es tan cercana como lo hicieron otros matemáticos anteriores por ejemplo los chinos, él encuentra una regularidad entre el área de los polígonos regulares y encuentra que π tiende a ser $\overline{10} = 3.16227$.

Seguido de estos aportes de la India, se expondrá el trabajo de otro personaje de Kazakhstan el cual brinda tres aproximaciones para π.

Choresmia

Este era el nombre que recibía anteriormente Uzbekistán, país ubicado en el Oriente medio, al sur de Kazakhstan. En este país se dieron tres aproximaciones diferentes al número π, en el año 830 aproximadamente, aunque desafortunadamente se halló poca información al respecto, se resalta como otro resultado de la matemática Oriental.

Imagen 3.14 Ubicación geográfica de Uzbekistan. Tomado de: http://3.bp.blogspot.com/-_Kouw6h-/VC60HSSkJbI/AAAAAAAAMMM/HiAbOwc6RJ8/s1600/mapauzbekistan.gif

Estas aproximaciones se las atribuyen al Choresmiano Alkarism (Arndt & Haenel, 2000, p.180) quien dejó su marca en la historia de π brindando tres valores distintos para este número:

- La primera, $\pi = \frac{22}{7}$, pretendía servir como un valor medio, un promedio del valor de π.
- $\pi = \sqrt{10}$, y
- $\pi = \frac{62832}{2000}$.

(Íbid, 2000, p. 180)

Las representaciones de π encontradas en el trabajo de Alkarism son de tipo simbólico dado que llegan a expresar de manera simbólica las aproximaciones y se deduce que también son gráficas dada la manera como se llegó a esos cálculos.

Además de agradecer a Alkarism por poner en evidencia estos resultado de su pueblo, también debemos tener presente que la palabra “algoritmo” que usamos hoy en día, está basado en su nombre completo: *Abu Ja’far Mohammed ibn Mûsâ al-Khowârizmî*; , también, la palabra “álgebra” se deriva del título de un famoso libro que escribió este personaje, llamado *Kitab al jabr w’al-muqalaba*.

Luego de este recorrido a través de la antigüedad, se llega a la edad media, donde π sigue siendo utilizado como herramienta. A continuación, se hará un recorrido de lo encontrado por algunos matemáticos e incluso artistas durante esa época.

Edad media

A continuación se mostrarán el estudio con π de algunos personajes de la edad media, como Dante Aliguieri quien hace una aproximación para este número siendo él un poeta. O como Leonardo da Vinci un célebre inventor cuyo trabajo con las áreas es impresionantemente fructífero en la actualidad.

Leonardo de Pisa

Alrededor del año 1220 (un salto grande desde donde se produjo la última aproximación para π con los orientales), llega un famoso matemática llamado Leonardo de Pisa o comúnmente conocido como Fibonacci.

El problema en el que se centra es en hallar el perímetro de la circunferencia, y lo soluciona empleando el método de Arquímedes, donde logra llegar a la siguiente aproximación utilizando un polígono regular de 96 lados:

$$\frac{864}{275} = 3.1418 \tag{3.12}$$

Sin embargo, se encuentra mucha más precisión en los decimales que lo encontrado por Arquímedes, aunque se dice que su método no fue tan sistemático como el de Arquímedes y su precisión se debe más a la suerte que a su método para calcular (Arndt & Haenel, 2000).

Las representaciones encontradas son simbólicas dado que utiliza más sus métodos de cálculo que la misma geometría dado que no empleó el proceso sistemático que utiliza Arquímedes.

Luego de Fibonacci, llega Dante Alighieri que curiosamente también posee una aproximación para π.

Dante Alighieri

Dante Alighieri fue un poeta italiano nacido en el año 1265 grande por su trabajo en el mundo de la poesía, principalmente por su obra “la Divina comedia”, en Italia es conocido como *il Sommo Poeta* que significa “el Poeta Supremo”. Además de sus obras se le considera el Padre del idioma italiano. A continuación se muestra la ubicación geográfica del país de nacimiento de Dante Alighieri en su época:

Imagen 3.15 Ubicación geográfica de Italia antigua. Tomado de: http://3.bp.blogspot.com/-k08aiHTsYiU/TsIYtCoYIMI/AAAAAAAAAIk/RaL2Z9-YL5A/s72-c/Italia_Renacimiento.png

Él creó una aproximación para π donde la cual es:

$$\pi = 3 + \frac{\sqrt{2}}{10} = 3.14142 \ldots \tag{3.13}$$

Además de ello escribió un pequeño poema en el que resume los esfuerzos de los geómetras por encontrar π, este es:

As the geometer his mind applies
To square the circle, nor for all his wit
Finds the right formula, however he tries… (Arndt & Haenel, 2000)

Lo que traduce:

"A medida que el geómetra aplica su mente
Para cuadrar el círculo, ni de toda su ingenio
Encuentra la fórmula correcta,
Sin embargo él trata…"

Sin embargo, no se conoce la manera como Alighieri llegó a esa aproximación. Pero se infiere que dado a su versículo, el cual habla de la cuadratura del círculo, su resultado, puede ser producto de un intento de solución a ese problema.

De lo anterior, se puede deducir que la representación de π es simbólica dada a la expresión que llega. Y de allí, muy posiblemente hay una representación gráfica dado el problema al que se enfrenta.

Luego de este poéta, llega otro artista del renacimiento italiano el cual sigue sorprendiendo con una aproximación para π.

Leonardo da Vinci

Tal vez no hace falta realizar una presentación a uno de los inventores más formidables de la historia, polímata florentino del renacimiento italiano, considerado genio universal y filósofo humanista, también hizo su aporte a una representación del número π, creando lo que se podría considerar una aproximación mecánica:

Este gran inventor, creador de tantas máquinas, hizo rodar en una ocasión un cilindro circular cuya altura era la mitad del radio de la sección transversal (Arndt & Haenel, 2000, p.181). Realizó este procedimiento, alrededor del año 1852, hasta completar una vuelta de revolución del cilindro; el área cubierta en el movimiento de este cilindro es la de un rectángulo la cual puede ser calculada fácil: será igual al área de la sección transversal del cilindro, esto es, el área del círculo, πr^2

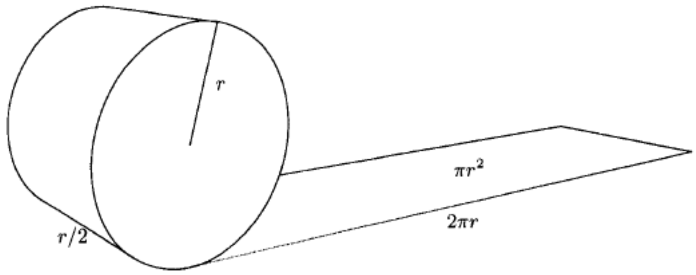

Imagen 3.16 Representación gráfica del método de Leonardo da Vinci. Tomado de Pi-Unleashed (2000, p. 181).

Las representaciones encontradas por da Vinci son concretas dado que utiliza un cilindro para encontrar el área del mismo de forma mecánica y de allí deducir la fórmula del área del círculo π.

A continuación se hará un cuadro con el resumen de este capítulo cuya primera columna contendrá el año en el cual se realizó el estudio del problema, la segunda columna poseerá el autor o la civilización involucrada, la tercera columna contendrá el tema por el cual surgió una investigación, la cuarta columna contendrá la aproximación encontrada y la quinta columna poseerá las representaciones de π tras la solución de los problemas.

Año	Autores o civilizaciones involucradas	Tema de estudio	Aproximación de π	Tipo de representación de π evidenciada
1900 a. C.	Babilonia.	Perímetro y área de la circunferencia. Cálculo de volúmenes.	$\pi = 3$	Gráfica.
1650 a. C.	Egipto.	Longitud de las pirámides. Área de figuras planas.	$\pi = 3.14297$ (no es explícita) $\pi = 3\frac{1}{6}$	Gráfica y concreta.
600 a. C.	India antigua.	Construcción de altares. Cuadratura del círculo.	$\pi = \frac{676}{225} = 3.00444$ $\pi = \frac{900}{289} = 3.1141 \ldots$ $\pi = \frac{25}{8} = 3.125$	Gráfica y concreta.
250 a. C.	Arquímedes.	Perímetro de la circunferencia.	$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$	Gráfica y simbólica.
206 a. C.	Liu Xin	Medición estándar.	$\pi = 3.1547$	Concreta.
Siglo III a. C.	Zhang Heng	Relación entre el área del cuadrado y el área del círculo inscrito en él.	$\pi = \sqrt{10} = 3.1622 \ldots$	Gráfica y simbólica.
Año 125	Claudio Tolomeo	Relación entre la circunferencia y su diámetro.	$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3{,}14166$	Gráfica y simbólica.
Año 217	Wang Fang	Desconocido.	$\pi = \frac{142}{45} = 3.15$	Gráfica y simbólica.

Año 263	Liu Hui	Área de la circunferencia.	$314\frac{64}{625} = A_{192} < A < A_{96} + 2\ A_{192} - A_{96}$ $= 314\frac{169}{625}$ $\pi \approx \frac{314 + \frac{4}{25}}{10^2} = 3.1416$	Gráfica.
Siglo V	Tsu Ch'ung-Chih	Calcular área del círculo.	$3.1415926 < \pi < 3.1415927$	Gráfica.
Año 499	Aryabhata	Perímetro de la circunferencia	$\frac{(\ 100 + 4\ \times 8) + 62000}{20000} = 3.1416$	Gráfica y simbólica.
Año 598	Brahmagupta	Perímetro de la circunferencia.	$\pi = \frac{\sqrt{1000}}{10} = \sqrt{10} = 3.16227$	Gráfico y simbólico.
Año 830	Choresmia	Perímetro de la circunferencia	$\pi = \sqrt{10}$ $\pi = \frac{22}{7}$ $\pi = \frac{62832}{2000}$	Simbólica y gráfica.
1220	Fibonacci	Perímetro de la circunferencia.	$\frac{864}{265} = 3.1418 \approx \pi$	Simbólica.
1265	Dante Alighieri	Cuadratura del círculo.	$\pi = 3 + \frac{\sqrt{2}}{10} = 3.14142 \ldots$	Simbólica y gráfica.
1452	Leonardo da Vinci	Área del círculo.	$\pi r^2 = Área\ del\ círculo$	Concreta.

Del cuadro se puede deducir que durante las épocas mencionadas, las representaciones que predominaron son de tipo gráfico dado que los problemas que se estudiaron fueron referentes al perímetro de la circunferencia y al área del círculo, es decir relacionados con la geometría.

De otro lado, esa diversidad de situaciones en la que se encuentra π es sinónimo de trascendencia del mismo, ya que desde 1900 a. C. hasta la época de Leonardo da Vinci (1452) surgen diferentes aproximaciones de este número desde diferentes culturas y tiempos.

Otra de los cosas a destacar es su inmersión en la cultura, ya que surge en el arte de Dante Alighieri, en las pirámides de Egipto y en los altares de la India y es ahí mismo donde se destaca la utilidad de este número en la sociedad desde las más antiguas civilizaciones.

También, se le atribuye a Leonardo da Vinci la fórmula para hallar el área del círculo. Efectivamente esta información, es confirmada por el trabajo de los autores en la elaboración de este fragmento.

En suma este capítulo contempla el recorrido de π en la historia y todas las aproximaciones que surgieron hasta la edad media. Durante esa época π juega el papel de herramienta. Donde a través de la solución de otras situaciones resulta este número.

Capítulo 4

π Como objeto de estudio

En el capítulo anterior, se observaron diferentes resultados respecto a una aproximación de π como producto de abordar problemas que inquietaban a diversas civilizaciones y algunos personajes; que surgen de necesidades culturales, arquitectónicas, o de problemas específicos de la geometría como hallar el perímetro de la circunferencia o el área del círculo; lo que aportó en algún momento a determinar cierto valor de π. Ahora, como se hizo mención al final del capítulo 2, se pasa a mostrar algunas representaciones y algunas aproximaciones del número π pero no como resultado de un trabajo cuyo objetivo era distinto a encontrar la mayor cantidad de cifras de este número; sino producciones que se lograron a partir de querer mostrar una aproximación más cercana de π.

A continuación, observaremos algunos trabajos relacionados con el propósito de la elaboración de este capítulo.

Según la información del vídeo, se deduce que fue Francois Vieté (en 1579) el primero en descubrir una expresión infinita para el cálculo de π, pero los inicios de las expresiones infinitas para el cálculo de éste número se dieron tiempo atrás deVieté, en la India.

India

Bajo la era mongol[5] de esta civilización, los indios realizaron el siguiente trabajo respecto a una aproximación de π, que de hecho, no fue 1 sino fueron 8 series, las cuales convergen a π, cada una con una ‘velocidad’ diferente a otra. Éstas series fueron realizadas 100 años atrás que la que se mencionaba en el vídeo como la primera serie convergente de π, aunque investigaciones recientes (Arndt & Haenel, 2000, p.186) sugieren que las series pudieron ser descubiertas mucho antes y, en particular, algunas de ellas se le deberían atribuir al nombre de Madhavan, quien vivió desde 1340 hasta 1425. (Más de 200 años atrás de la de Vietè).

[5] Que inicia a principios del siglo XVI, y dura aproximadamente 200 años.

Todas estas series que convergen a π fueron encontradas en el escrito Sánscrito *Yukti-Basha* y *Yukti-Dipika*, el segundo texto, escrito por Sankaran (1500 – 1560) quien mencionaba que recibió instrucciones por parte de Jyestha – Devan, quien para esa época, había escrito el *Yukti-Basha*. Estos libros contenían la prueba de las series así como la serie misma. Estos dos estudiantes recibieron clases en astronomía y matemáticas por parte de Kelallur Nilakantha Somayaji (1444 – 1545), se dice que si las series no estaban ya construidas, la última persona que pudo haber escrito acerca de éstas fue Nilakantha.

El título del ensayo de Charles M. Whish[6] "*On the Hindu Quadrature of the circle and the infinite series of the proportion of the circunference to the diameter exhibited in the four Sastras, the Tantra Sahgraham, Yucti Bhasha, Carana Padhati and Sadratnamala"* (Arndt & Haenel, 2000, p.186) sugiere que el trabajo realizado por los Indios para hallar esta aproximación, fue la búsqueda de series infinitas de la proporción que hay entre la circunferencia y su diámetro. El trabajo realizado por los indios fue el siguiente:

Las ocho series descubiertas por los indios fueron (S. Parameswaran, 1992, Citado por Arndt & Haenel, 2000, p.223):

$$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^1} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \cdots\right) \tag{4.1}$$

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots \mp \frac{1}{p-1} \pm \frac{\frac{p}{2}}{p^2+1} \tag{4.2}$$

Donde p es el último denominador impar $+1$

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots \mp \frac{1}{p-1} \pm \frac{\frac{p^2}{4} + 1}{\frac{p}{2}\ p^2 + 4p - 1} \tag{4.3}$$

Donde p es el último denominador impar $+1$

$$\frac{\pi}{16} = \frac{1}{1^5 + 4 \cdot 1} - \frac{1}{3^5 + 4 \cdot 3} + \frac{1}{5^5 + 4 \cdot 5} - \frac{1}{7^5 + 4 \cdot 7} + \cdots \tag{4.4}$$

[6] Charles M.Whish (1794 – 1833), funcionario inglés del Establecimiento Madras de la East India Company.

$$\pi = 3 + \frac{4}{3^3 - 3} - \frac{4}{5^3 - 5} + \frac{4}{7^3 - 7} \dots \tag{4.5}$$

$$\pi \approx 2 + \frac{4}{2^2 - 1} - \frac{4}{4^2 - 1} + \frac{4}{6^2 - 1} - \dots \mp \frac{4}{p^2 - 1} \pm \frac{4}{2(p+1)^2 + 4} \tag{4.6}$$

Donde p es el último cuadrado perfecto incluso en esta serie

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} + \frac{1}{10^2 - 1} + \frac{1}{14^2 - 1} + \cdots \tag{4.7}$$

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4^2 - 1} - \frac{1}{8^2 - 1} - \frac{1}{12^2 - 1} - \frac{1}{16^2 - 1} - \cdots \tag{4.8}$$

Estas fueron las representaciones que usaron los indios para aproximar al valor del número π; pero no todas convergen de la misma manera, a la misma velocidad: la serie (4.5) es más eficaz que la serie (4.2) refiriéndonos a la velocidad de la convergencia, ya que, por ejemplo, la serie (4.2) requiere de 10^{10} para producir 10 decimales correctos de π, en cambio, la (4.5) requiere de 10^3 términos para alcanzar este mismo resultado (muy extenso todavía considerando el procedimiento, pero comparándolas entre ellas, se observa esta diferencia crucial). La serie (4.1) es mucho más convergente (por decirlo de alguna manera), ya que con tan sólo 28 términos, produce 16 decimales acertados del número π (Arndt & Haenel, 2000, p.187).

Esta es la segunda mención en este trabajo sobre los hallazgos en la India acerca de π, trabajos que no pertenecen a la matemática occidental, y son de igual manera importantes en el desarrollo histórico de la aproximación a este número; aunque en esta ocasión en particular, de acuerdo con S. Parameswaran[7], los orígenes de estas series son complicadas, especialmente en lo que se transmitían de forma oral.

Este tipo de representación, hablando de las 8 series expuestas que fueron descubiertas por los indios, se refiere, aunque vienen de un contexto geométrico (el hallar la razón entre la circunferencia y su diámetro) a una representación simbólica, ya que son procesos de carácter alfanumérico, los cuales representan ciertas operaciones para llegar a la aproximación del número π

[7] Persona que, junto a Rinjan Roy, se debe que el mundo se halla enterado de este trabajo de los Indios (Arndt & Haenel, 2000, p.186)

Luego de ver estas enigmáticas series (debido a su desconocimiento en su hallazgo) se muestra a continuación el trabajo de un matemático amateur Francés.

Francois vieté

Este abogado de profesión y matemático amateur francés (cuyos aportes a la matemática fueron muy importantes), brindó dos aproximaciones del número π, una como una acotación, en la cual encontró dos valores numéricos entre los cuales se encontraba el valor de este número, y una expresión infinita, considerada como el primer producto infinito para calcular el valor de π. Sus trabajos son:

Su primer trabajo dio como resultado el descubrimiento de 9 cifras decimales de π. Este trabajo permite intuir que lo que buscaba Vietè era el valor de π a través de inscribir y circunscribir polígonos regulares, trabajo realizado en 1579.

Ahora, ¿cómo realizó su aproximación?

El combinó el modelo de Arquímedes con principios de trigonometría, calculando el perímetro de polígonos de $3 \cdot 2^{17} = 393216$ lados. Su resultado fue el siguiente:

$$n \cdot \sin \frac{180}{n} < \pi < n \cdot \tan \frac{180}{n}$$

Y con $n = 393216$,

$$3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926537$$

(Arndt & Haenel, 2000, p. 182).

Para encontrar los valores de seno y tangente, Vietè aplica la siguiente fórmula de manera reiterada:

$$2 \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$$

(Íbid, 2000).

De esta representación, aunque el método surge de una elaboración geométrica (el método de Arquímedes) ya había una generalización de éste, lo que permite deducir que no se usa una representación geométrica, sólo se evidencia una de tipo simbólico, ya que además usa la trigonometría como proceso algorítmico, y expresa π entre dos valores trigonométricos. Ahora, observemos la que considera la historia como el primer producto infinito que converge a π:

En 1593, no satisfecho con su resultado aplicando el método de Arquímedes, como se evidenció en la consulta previa plasmada en el capítulo 2, se observa el resultado la que este famoso matemático llega, descubre el primer producto infinito (Posamentier & Lehmann, 2004, p. 63): para determinar el valor de π:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots \tag{4.9}$$

¿Cómo saber si este producto es válido? Se muestra a continuación una justificación del valor al cual converge esta serie: Partiendo[8] de la fórmula del ángulo doble:

$$\sin 2\theta \ = 2 \cdot \sin\theta \cos\theta \tag{4.10}$$

Para $\theta = \frac{x}{2}$;

$$\sin x = 2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$$

Aplicando (4.10) para $\sin\frac{x}{2}$:

$$\sin x = 2\left(2 \cdot \sin\frac{\frac{x}{2}}{2} \cdot \cos\frac{\frac{x}{2}}{2}\right)\cos\frac{x}{2}$$

$$= 4 \cdot \sin\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4}$$

Aplicando (4.10) en el valor de seno de manera reiterada, obtendremos lo siguiente:

$$\sin x = 8 \cdot \sin\frac{x}{8} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8}$$

[8] Esta demostración se realiza a partir de lo propuesto en http://www.ohio.edu/people/eisworth/neat_stuff/Viete.pdf, Septiembre 9 de 2015.

$$= 16 \cdot \sin\frac{x}{16} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdot \cos\frac{x}{16}$$

$$= 32 \cdot \sin\frac{x}{32} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdot \cos\frac{x}{16} \cdot \cos\frac{x}{32}$$

.

.

.

$$\sin x = 2^n \cdot \sin\frac{x}{2^n} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n}$$

Si dividimos en ambos lados de la ecuación por x:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{2^n \cdot \sin\frac{x}{2^n} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n}}{x}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{2^n \cdot \sin\frac{x}{2^n}}{x} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n}$$

Cuando $n \to \infty$, $2^n \to \infty$, por tanto $\frac{x}{2^n} \to 0$; esto hace que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \to 1$$

Ya que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \to 1$$

Por tanto, la serie se puede escribir de la siguiente manera, cuando $n \to \infty$:

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n}$$

Para $x = \frac{\pi}{2}$, para el lado izquierdo de la igualdad:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Y en el lado izquierdo de la igualdad, ocurre:

- $\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos\frac{x}{4} = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Y el producto continúa indefinidamente, justificando la ecuación (4.9).

Este producto infinito, y lo que involucra su demostración, hace parte de una representación simbólica según nuestra caracterización, claramente se observa un proceso algorítmico para llegar al valor de π, proceso que da a comprender ciertos conceptos y operaciones.

Luego de observar el trabajo de este brillante matemático, observemos otro trabajo con poca información recopilada, pero importante en sentido que se continúa con el método de Arquímedes.

Adriaen Van Roomen

Conocido como el 'matemático flamenco', Adrianus Romanus (conocido también de esta forma) hizo uso de polígonos inscritos y circunscritos para hallar el valor de π, a pesar que Vietè ya hubiera trabajo otra forma de abordar este problema (hallar la mayor cantidad de cifras del número π) no paraba de usarse el efectivo método de Arquímedes.

El físico y matemático Belga Adriaen Van Roomen usa para su aproximacíon brindada en 1593 un polígono regular de 2^{30} lados, esto es, 1073741824 lados, calculando el valor de π con 17 cifras decimales, las cuales las primeras 15 eran correctas (Posamentier & Lehmann, 2004, p. 63).

Esta representación, no solo usa la generalización realizada en el método de Arquímedes, ya que se hace uso de trigonometría, propiedades que cumplen las funciones trigonométricas respecto a un ángulo, esto es, una representación simbólica.

A pesar de la poca información que se encuentra de este trabajo de Von Roomen, es otro aporte (entre muchos otros) a la búsqueda de la mayor cantidad de cifras del número π, se resalta en este trabajo, ya que, a pesar que se inicia el trabajo con las series y expresiones infinitas, aún se sigue conservando un método que data desde el año 250 a.C., ¡Un poco más de 1800 años!.

Luego de esto, observemos el resultado de un hombre que 'se llevó a π hasta su tumba'.

Ludolph Van Ceulen

El matemático alemán Ludolph van Ceulen (1540 – 1610) se ganó, debido a la aproximación que logró, que el número π se nombrara en ese entonces "*Ludolph's number"* (número de Ludolph) o *"Ludolphian number"* (número Ludolphino). Usando el método de Arquímedes, este matemático alemán realiza su aproximación a π, obteniendo dos resultados:

- Inicialmente, en el año 1596, van Ceulen aproximó π con 20 cifras decimales (Posamentier & Lehmann, 2004, p. 63) en el año 1596, esto fue resultado de calcular el perímetro de un polígono inscrito y circunscrito de $60 \cdot 2^{33}$, es decir, 515396075520 lados.
- Su afán en encontrar una mejor aproximación hizo que su intento por hallar la mayor cantidad de cifras del número π no parara en su primer resultado, en 1610, daría un enorme salto, al encontrar 35 cifras decimales de π usando polígono regular de 2^{62} lados, esto es, $4{,}611{,}686{,}018{,}427{,}387{,}904$ lados.

Según el método usando, se intuye, nuevamente, que la representación que se usa es la simbólica, ya que hace uso del método de Arquímedes, pero usando polígonos más grandes, esto sería imposible dibujar a lápiz, esto requirió la generalización del método propuesto por el Griego, esto es, una representación simbólica.

En su tumba, la siguiente aproximación, a la que llegó él, fue grabada: *cuando el diámetro es 1, entonces la circunferencia del círculo es mayor que*

$$\frac{314159265358979323846264338327950288}{100000000000000000000000000000000000}$$

y menor que

$$\frac{31415926535897932384626433832795028 9}{100000000000000000000000000000000000}$$

(Gourdon & Sebah, 2010).

Este grabado se debió gracias a la petición de su esposa, que se hallaba en St. Pieter’s Kerk, en Leiden, Holanda; pero se extravió en el transcurso de la primera guerra mundial.

Poco antes que el método de Arquímedes se reemplazara por el trabajo de las series, hay un resultado importante que resaltar, antes de dar este gran salto.

Wildebrod Snell

Astrónomo y matemático Holandés, hace uso del método de Arquímedes para realizar su aproximación en el año 1621, salvo que la logra ejecutar de una mejor forma que Van Ceulen, el logra calcular 34 dígitos de π con polígonos de 2^{30} lados, mientras que van Ceulen, usando el polígono con la misma cantidad de lados, solamente halló 16 (Arndt & Haenel, 2000, p.183). Snell dividió el polígono una vez más en tres partes, y construyó desde ese lado del polígono dos lados adicionales que contenían el arco más preciso. Este método se basó en la siguiente inecuación:

$$\frac{3\sin\theta}{2+\cos\theta} < \theta < 2\sin\frac{\theta}{3} + \tan\frac{\theta}{3} \tag{4.12}$$

El límite inferior fue descubierto por el cardenal Alemán Nicolaus Cusanus, y el límite superior, fue descubierto por Snell mismo (Íbid, p. 183).

Esta representación, se clasifica como simbólica, ya que, además de involucrarse una inecuación trigonométrica, el trabajar con polígonos de 2^{30} lados, no involucra representarlo geométricamente en su totalidad, ya que el procedimiento se puede realizar de una manera un poco más generalizada como ya vimos en otros trabajos anteriores.

John Wallis

Este profesor de matemáticas de las universidades de Cambridge y Oxford, publicó un libro llamado *Arithmetica infinitorum,* en el cual proporcionó una aproximación para π, pero se hayan dos informaciones al respecto[9]:

- En (Arndt & Haenel, 2000, p.187), se describe la siguiente productoria publicada por él para la aproximación de $\frac{4}{\pi}$:

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8}\ldots. \tag{4.13}$$

Expresando esto como una productoria:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1\quad 2n+1}{2n\quad 2n+1}=\frac{\pi}{2}. \tag{4.14}$$

¿Por qué expresarse de esta manera? En (Íbid, 2000, p.187), se menciona que no se puede presentar a los estudiantes de la forma en que está escriba la fórmula (4.13), ya que el estudiante podría pensar que el producto dará como resultado $\frac{\infty}{\infty}$, por tanto, se propone que se presente de la siguiente manera:

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8}$$

Si bien es fácil calcular cada término del producto propuesto por Wallis, no es muy efectivo para el cálculo de pi, ya que después de 100 términos, por ejemplo, es solamente exacto hasta $7\cdot 8\cdot 10^{-3}$.

- En (Posamentier & Lehmann, 2004), se regista la siguiente fórmula para $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{2n-1\ \cdot(2n+1)}\cdot\ldots$$

Que se puede escribir como productoria de la siguiente forma:

[9] Pero se concuerda que fue en 1665

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2}. \qquad (4.15)$$

Este valor, al converger a $\frac{\pi}{2}$, significa que el doble de cada término se acerca más y más al valor de π de la misma forma como el número de términos aumenta.

Una justificación de esta productoria[10], que se resalta por la manera tan bella en que se realiza, partiendo de una función trigonométrica:

Considere que las raíces de $\sin x$ son de la forma $\pm n\pi$, donde $n = 1,2,3,4, \ldots$, Por tanto, se puede expresar $\sin x$ como un producto infinito de la siguiente forma:

$$\sin x = \ x-0 \ \ x-\pi \ \ x+\pi \ \ x-2\pi \ \ x+2\pi \ \ \ldots \qquad (4.16)$$

Si se divide entre x a ambos lados de la ecuación (4.14), y factorizando:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x-0 \ \ x-\pi \ \ x+\pi \ \ x-2\pi \ \ x+2\pi \ \ \ldots}{x}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \ x-\pi \ \ x+\pi \ \ x-2\pi \ \ x+2\pi \ \ \ldots$$

$$\frac{\sin x}{x} = \ x^2-\pi^2 \ \ x^2-4\pi^2 \ \ x^2-9\pi^2 \ \ x^2-16\pi^2 \ \ \ldots \qquad (4.17)$$

Ahora, la ecuación (4.15) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{\sin x}{x} = k \ \ 1-\frac{x^2}{\pi^2} \ \ 1-\frac{x^2}{4\pi^2} \ \ 1-\frac{x^2}{9\pi^2} \ \ 1-\frac{x^2}{16\pi^2} \ \ 1-\frac{x^2}{25\pi^2} \ \ \ldots \qquad (4.18)$$

Donde k es una constante.

¿Por qué?, se factorizan los términos de la ecuación (4.17) de esta manera:

$$x^2-\pi^2 \ = -\pi^2 \ \ \frac{x^2}{-\pi^2}+1 \ = -\pi^2 \ \ 1-\frac{x^2}{\pi^2}$$

[10] Si el lector gusta, puede observar otro tipo de justificación en, https://srolam.files.wordpress.com/2009/08/prueba-de-stirling1.pdf, consultado el 10 de Octubre de 2015.

Ahora, hay que hallar el valor de esa constante para que se satisface esa factorización, pero su valor es sencillo: Cuando $x \to 0$, ocurre lo siguiente en la ecuación (4.18):

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- Todos los términos del producto $1 - \frac{x^2}{\pi^2} \quad 1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \quad 1 - \frac{x^2}{9\pi^2}$ ... van a tender a 1 cuando $x \to 0$, ya que

$$1 - \frac{x^2}{\pi^2} \;\to\; 1 - \frac{0}{\pi^2} \;\to\; 1 - 0 \;\to 1$$

Y así va a ocurrir en todos los términos; por tanto, la ecuación (4.18) cuando $x \to 0$ queda

$$1 = k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots$$

Esto hace que $k = 1$. Por tanto, la ecuación (4.18) queda:

$$\frac{\sin x}{x} = \quad 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \quad 1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \quad 1 - \frac{x^2}{9\pi^2} \quad 1 - \frac{x^2}{16\pi^2} \quad 1 - \frac{x^2}{25\pi^2} \quad \ldots \qquad (4.19)$$

Ahora, si hacemos $x = \frac{\pi}{2}$:

- $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

- $1 - \frac{\frac{\pi}{2}^{2}}{\pi^2} \quad 1 - \frac{\frac{\pi}{2}^{2}}{4\pi^2} \quad 1 - \frac{\frac{\pi}{2}^{2}}{9\pi^2} \quad 1 - \frac{\frac{\pi}{2}^{2}}{16\pi^2} \quad 1 - \frac{\frac{\pi}{2}^{2}}{25\pi^2} \quad \ldots$

$= \quad 1 - \frac{\pi^2}{4\pi^2} \quad 1 - \frac{\pi^2}{4 \cdot 4\pi^2} \quad 1 - \frac{\pi^2}{4 \cdot 9\pi^2} \quad 1 - \frac{\pi^2}{4 \cdot 16\pi^2} \quad 1 - \frac{\pi^2}{4 \cdot 25\pi^2} \quad \ldots$

$= \quad 1 - \frac{\pi^2}{4\pi^2} \quad 1 - \frac{\pi^2}{4 \cdot 4\pi^2} \quad 1 - \frac{\pi^2}{4 \cdot 9\pi^2} \quad 1 - \frac{\pi^2}{4 \cdot 16\pi^2} \quad 1 - \frac{\pi^2}{4 \cdot 25\pi^2} \quad \ldots$

$= \quad 1 - \frac{1}{4} \quad 1 - \frac{1}{16} \quad 1 - \frac{1}{36} \quad 1 - \frac{1}{64} \quad 1 - \frac{1}{100} \quad \ldots$

Por tanto queda:

$$\frac{2}{\pi} = \quad 1-\frac{1}{4} \quad 1-\frac{1}{16} \quad 1-\frac{1}{36} \quad 1-\frac{1}{64} \quad 1-\frac{1}{100} \quad \ldots$$

Rescribiendo y operando se llega a la conclusión final:

$$\frac{2}{\pi} = \quad \frac{4}{4}-\frac{1}{4} \quad \frac{16}{16}-\frac{1}{16} \quad \frac{36}{36}-\frac{1}{36} \quad \frac{64}{64}-\frac{1}{64} \quad \frac{100}{100}-\frac{1}{100} \quad \ldots$$

$$\frac{2}{\pi} = \quad \frac{3}{4} \quad \frac{15}{16} \quad \frac{35}{36} \quad \frac{63}{64} \quad \frac{99}{100} \quad \ldots$$

$$\frac{2}{\pi} = \quad \frac{3}{4} \quad \frac{15}{16} \quad \frac{35}{36} \quad \frac{63}{64} \quad \frac{99}{100} \quad \ldots$$

$$\frac{\pi}{2} = \quad \frac{4}{3} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{36}{35} \quad \frac{64}{63} \quad \frac{100}{99} \quad \ldots$$

$$\frac{\pi}{2} = \quad \frac{4}{3} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{36}{35} \quad \frac{64}{63} \quad \frac{100}{99} \quad \ldots$$

$$\frac{\pi}{2} = \quad \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \quad \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \quad \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \quad \frac{8\cdot 8}{7\cdot 9} \quad \frac{10\cdot 10}{9\cdot 11} \quad \ldots$$

Resta escribirlo de manera adecuada y así queda justificada la productoria (4.15).

Esta representación se observa que es netamente simbólica, una estructura matemática, con convenios, operaciones y conceptos particulares, para comprender todo el proceso que involucra esta productoria.

Un hombre realizó una aproximación con base en el trabajo de Wallis, pero brinda una representación diferente al de una serie o una productoria: se trata de la fracción continua propuesta por William Brouncker.

William Brouncker

A pesar que no se tienen certeza hasta el momento de cómo lo hizo (Posamentier & Lehmann, 2004), William Viscount Brouncker (1620 – 1684) transformó la productoria de Wallis para $\frac{4}{\pi}$ en una fracción continua, la primera en la historia de π (Arndt & Haenel, 2000, p.188), esto no sugiere como tal cuál fue el propósito de este personaje, pero su resultado brinda otra manera de escribir una representación de una aproximación del número π.

Esta fue la fracción continua propuesta por Brouncker en 1658:

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cdots}}} \tag{4.20}$$

Este procedimiento para obtener el valor señalado, no sólo es tedioso sino también requiere un buen número de términos antes de que se acerque al valor de lo que hoy conocemos de $\frac{4}{\pi}$. Veamos por qué[11]:

Tomemos la fracción continua como si fuera una sucesión, es decir, haremos el cálculo de un primer término, de un segundo, y así sucesivamente, para ver qué tan rápido converge al valor que se espera.

- Podemos tomar como primer término de la fracción al 1.
- Nuestro segundo término de la fracción será $1+\frac{1^2}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5$.
- Y podemos continuar así para observar cuán rápido se acerca al valor al que aproxima (recordemos que el valor de $\frac{4}{\pi}$ es 1,2732395447351626861510701069…).
- El tercer término de la fracción:

$$1+\frac{1^2}{2+\frac{3^2}{2}}=1+\frac{1}{2+\frac{9}{2}}=1+\frac{1}{\frac{13}{2}}=1+\frac{2}{13}=\frac{15}{13}=1{,}153846153846$$

- El cuarto término de la fracción

$$1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{\cfrac{29}{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{18}{29}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{76}{29}}=1+\frac{29}{76}=$$

[11] Realizado según lo propuesto en (Posamentier & Lehmann, 2004, p. 66).

$\frac{105}{76} = 1{,}381578947368421052 63.$

- El quinto término de la fracción limitándonos a escribir el número que resulta, ya que el lector conoce la estructura con la cual se realizan las operaciones necesarias, es

$$\frac{945}{789} \approx 1.1977186311787072243346007604563.$$

Como se pudo observar, nada más con los 5 primeros términos, se nota una diferencia considerable respecto al valor exacto de $\frac{4}{\pi}$.

Esta representación corresponde según a nuestra categorización, a una representación simbólica, transforma una representación simbólica anterior en otra, la cual tiene sus propios algoritmos, convenios, operaciones y relaciones.

A partir de los descubrimientos realizados por Isaac Newton (1643 – 1727) y Gottfried Leibniz (1646 – 1716) sobre el cálculo diferencial e integral (Arndt & Haenel, 2000, p. 188) hacia la segunda mitad del siglo XVII, anunciaba consigo un "boom" en las series que se descubrirían, que convergerían a π.

Gregory – Leibniz

En esta aproximación, presentada en 1674, ocurre algo particular: Una persona elabora la primera serie para arcotangente, y otro reemplaza la variable por un valor concreto, y listo… (Obviamente, no es así de sencillo, explicaremos a continuación).

Esta aproximación se logró gracias a las series de Gregory, que resulta de un logro del estudio del cálculo integral. Esta serie proviene de expresar el arco tangente como una integral, la cual da como resultado[12]:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \;\; = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (4.21)$$

[12] Cabe resaltar que no se debe interpretar las igualdades de esta manera explícita, lo que se dice allí, es que para hallar el arco tangente, lo expresan en su forma integral, y a la expresión $\frac{dx}{1+x^2}$ la escriben como un polinomio para luego realizar la integral de cada término de la misma.

(Boyer, 1991, p. 386).

Gregory realiza con esto la primera serie para arco tangente (Arndt & Haenel, 2000), pero no realizó el sencillo paso de reemplazar x por 1, esta labor la realizó Leibniz, a lo cual, la siguiente aproximación al número π se le llamó la serie Gregory – Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots \tag{4.22}$$

Leibniz descubre esta serie independientemente de Gregory, y lo cita en una carta enviada a muchos de sus amigos, en 1674, mientras que él conocía que en la India ya se había llegado al mismo resultado[13].

Desafortunadamente (hablando respecto a la rapidez de la convergencia) esta es una aproximación muy general, ya que la serie converge muy despacio; tomaría resolver los primeros cien mil términos para llegar a obtener 5 términos acertados de π (Posamentier & Lehmann, 2004, p. 67). Esta representación, es netamente simbólica, no hace falta argumentar el porqué de esta caracterización, teniendo en cuenta la categorización realizada en el capítulo 1.

Leonhard Euler

Hay que resaltar que en 1706, William Jones usa por primera vez el símbolo π para denotar la relación entre el perímetro de la circunferencia y su radio (Posamentier & Lehmann, 2004, p. 67), pero esta notación cobra su mayor popularidad, cuando Leonhard Euler (1707 – 1783) lo usa en su libro *Introductio in analysin infinitorium* para representar el radio de la circunferencia con su perímetro.

Euler desarrolló numerosos métodos para calcular π, algunos de ellos aproximando al valor de este número más rápido (es decir, sin necesidad de tener muchos términos de una serie, por ejemplo); él calculó hasta 126 décimas correctas de este fantástico número. Una de las fórmulas que usa para calcular el valor de π es la primera de un grupo de series cuya

[13] El primer trabajo expuesto en este capítulo, realizado en la India.

convergencia a este número es asombrosamente rápida comparada con las ya vistas. Esta serie en particular es muy interesante (Posamentier & Lehmann, 2004, p. 68), ya que es una serie fue creada tomando los cuadrados de los términos de la serie armónica:

Recordemos que la serie armónica se expresa de la siguiente forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \ldots \tag{4.23}$$

Ahora, si elevamos toda la serie al cuadrado, desde su segundo término, obtendremos esta serie, observe su convergencia:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} \ldots \tag{4.24}$$

Pero no fue Euler el primero en intentar trabajar esta serie en 1736[14] (Guillera, 2007). Tiempo atrás, los hermanos Jacob (1654 – 1705) y Johann Bernoulli (1667 – 1748) habían intentado, sin lograrlo, observar a qué valor converge esta serie infinita:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} \ldots$$

Pero es Euler, quien en 1736 demuestra su valor de convergencia (el que se muestra en la ecuación (4.24)). No se expone la demostración de cómo dedujo este resultado Euler[15], daremos paso a mostrar otros maravillosos resultados encontrados por este genio.

Euler realizó la demostración de muchas fórmulas parecidas a la anterior, como son (Íbid, 2007):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \tag{4.25}$$

[14] El lector encontrará después una inconsistencia en las fechas, ya que la siguiente aproximación se dio en 1706, pero se organiza de esta manera, ya que la que refiere a la fecha anterior, fue la precursora del cálculo de π usando computadoras.
[15] Si lo desea, en Arndt & Haenel (2000, p. 191) puede encontrar una comprobación sobre cómo logra su resultado Euler.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90} \qquad (4.26)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^2}{32} \qquad (4.27)$$

Y la no parecida

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2}{n^2}=\frac{\pi^4}{72} \qquad (4.28)$$

Otro resultado maravilloso al cual llegó Euler respecto a π, lo logró en su estudio de la divergencia de los inversos de los números primos (Íbid, 2007). Consideró progresiones geométricas de la forma

$$1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^6}+\frac{1}{p^8}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}},$$

Y observó que multiplicando estos desarrollos para todo p primo, se obtiene

$$\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}=\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad (4.29)$$

Que mas allá de evidenciar una igualdad entre una productoria y una sumatoria que convergen al número π, halla una relación entre los números primos y el número π.

Otra fórmula genial propuesta por Leonhart Euler en 1738, fue basada en arco tangentes, aunque no es la primera, nos servirá más adelante para explicar este tipo de series, por eso no se da más información de la misma en este espacio:

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3} \qquad (4.30)$$

Y no hay que olvidar esta maravillosa fórmula, comúnmente considerada como la más fascinante de todos los tiempos (Arndt & Haenel, 2000, p. 190) porque une en una fórmula 5 cantidades básicas de las matemáticas:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{4.31}$$

De esta fórmula se han escrito y dicho muchísimas cosas, y, en particular, para π, también hablaremos sobre ella. Euler inicialmente no expresó “su” fórmula de esta manera (Íbid, 2000, p. 190), la expuso así:

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z \tag{4.32}$$

La cual, reemplazando $z = \pi$ se convierte en la ecuación (4.28). ¿por qué? $\cos \pi = -1$ y $\sin \pi = 0$. Pero esta expresión no es del todo nueva, Roger Cotes publicó esta ecuación equivalente en 1716 (Íbid, 2000, p. 190):

$$\sqrt{-1} \cdot x = \log\left(\cos x + \sqrt{-1}\sin x\right) \tag{4.33}$$ [16]

Finalmente, sabemos que se puede escribir la fórmula (4.28) de la siguiente forma:

$$\ln e^{i\pi} = \ln(-1)$$

$$i\pi = \ln(-1)$$

$$\pi = \frac{\ln(-1)}{i} \tag{4.34}$$

Que, sin duda, es una fórmula para el número π realmente maravillosa.

Todas estas representaciones brindadas por este genio de las matemáticas, se observa que es de categorización simbólica, todas las normas, operaciones, y conceptos matemáticos que hay inmersas en cada una de ellas son excepcionales, y además, las clasifican entre este grupo de representaciones.

A continuación observaremos el inicio de las fórmulas de arco tangente, que dieron paso en la era computacional al cálculo de cifras decimales de π de manera rápida, iniciemos con el precursor de estas fórmulas: John Machin.

[16] Cabe aclarar que esta no fue la notación que el usó, pero los autores la escriben de esta manera para hacer relación a la notación actual.

John Machin, el inicio de las fórmulas de arco tangente

Es preciso mencionar ¿por qué no sólo se habla de un hombre, sino se hace referencia a algo más en el nombre de esta aproximación? Simple. Es a partir de este punto que comienzan a surgir fórmulas para calcular π a una velocidad sin precedentes desde los primeros intentos en aproximar la mayor cantidad de cifras de este número; y el hombre que inicia este trabajo es el mencionado, John Machin, cuya fórmula es usada años después para calcular cifras pero no a lápiz y papel, sino haciendo uso de las primeras computadoras, arrojando resultados sorprendentes. Pero se debe ir paso a paso en esta descripción, por ahora, se enfoca el desarrollo de este trabajo en las fórmulas de arco tangente.

Profesor de astronomía en Londres, a los 26 años, John Machin es conocido en la historia por ser la persona que desarrolló una de las mejores fórmulas para el cálculo de cifras de πen 1706, logrando calcular 100 cifras decimales de este número. Usa una combinación dos series de arco tangente en una expresión sencilla de leer (Arndt & Haenel, 2000, p. 192), siendo su objetivo calcular la mayor cantidad de cifras de π, y a pesar que en su época logró lo mencionado anteriormente de cifras decimales, su fórmula, junto con otras producciones posteriores, serviría para calcular muchas más cifras de las que su tiempo le permitió.

Esta fórmula de arco tangente, tan famoso por lo descrito en el párrafo anterior, es la siguiente:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{239} \tag{4.35}$$

Pero, sin computadoras para calcular valores, ¿Cómo hizo Machin para llegar a sus casi 100 cifras?, John expresó cada una de las expresiones de arco tangente usando esta serie de Gregory:

$$\arctan\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} \tag{4.36}$$

Para la primera expresión de arco tangente, haciendo $x = 5$, el calcula alrededor de 70 términos de la serie (4.33), y para la segunda expresión, hace $x = 239$ necesitando solamente 20 términos (Arndt & Haenel, 2000, p. 193).

En Guillera (2007), se muestran dos identidades del mismo tipo que la (4.35), pero conducen a series de convergencia más lentas:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} \tag{4.30}$$

$$\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} \tag{4.37}$$

Pero ¿cómo surgen todas estas fórmulas?, para comprender un poco este proceso, se expone lo evidenciado en Arndt & Haenel (2000, p. 70) con una de las fórmulas que aseguran ellos es la más sencilla: una fórmula propuesta por Leonhard Euler, la fórmula, (la ecuación 4.30)

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} \tag{4.30}$$

En la siguiente gráfica se puede evidenciar una interpretación gráfica de esta fórmula:

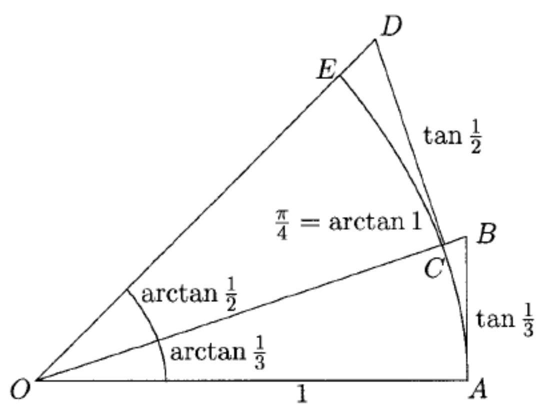

Imagen 4.1. Interpretación gráfica de la fórmula 4.28. Tomado de (Arndt & Haenel, 2000, p. 71).

La suma de los arcos $AC = \arctan\frac{1}{3}$ y $CE = \arctan\frac{1}{2}$ produce el arco $AE = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Pero se puede llegar a una mejor fórmula de la siguiente forma (Knoop, 1956, p. 246 citado por Arndt & Haenel, 2000, p. 72): Si hacemos el ángulo α igual a

$$\alpha = \arctan\frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7}\cdots$$

Este resultado se obtiene basado en la serie de Gregory (4.19), haciendo $x = \frac{1}{5}$, Entonces, siendo $\tan\alpha = \frac{1}{5}$,

$$\tan 2\alpha = \frac{2\cdot\tan\alpha}{1 - \tan\alpha^{\ 2}} = \frac{1}{5}$$

y

$$\tan 4\alpha = \frac{120}{119}$$

Esta última cantidad es algo mayor a $\frac{\pi}{4}$. Ahora, si introducimos otro ángulo β con $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$, entonces[17]

$$\tan\beta = \frac{\tan 4\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\alpha\cdot\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{239}$$

Para el cálculo de β, se realiza lo mismo que se hizo con el ángulo α:

$$\beta = \arctan\frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7}\cdots$$

Entonces, α y β juntos, producen

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta$$

$$= \ 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Que corresponde a la fórmula (4.35).

[17] Esta operación se hace basado en la propiedad $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$

Hay otra manera de interpretar el surgimiento de algunas de estas fórmulas de esta manera[18]: Observe la siguiente identidad trigonométrica:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \tag{4.38}$$

Si reemplazamos $\alpha=\arctan a$ y $\beta=\arctan b$ en (4.38) tenemos:

$$\tan(\arctan a+\arctan b)=\frac{\tan(\arctan a)+\tan(\arctan b)}{1-\tan(\arctan a)\cdot\tan(\arctan b)}$$

$$^{19}\tan(\arctan a+\arctan b)=\frac{a+b}{1-a\cdot b}$$

$$\arctan a+\arctan b=\arctan\frac{a+b}{1-a\cdot b} \tag{4.39}$$

Y así, reemplazando por los valores apropiados se pueden demostrar algunas fórmulas de arco tangente; por ejemplo, si reemplazamos $\alpha=\tan\frac{1}{2}\ y\ \beta=\tan\frac{1}{3}$, se llega al final a la siguiente expresión:

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\arctan 1$$

Y $\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$, probando en este caso la fórmula de arco tangente descubierta por Euler, la fórmula (4.30).

Posterior a esto, no se hará una clasificación de la representación que usó Machin para su aproximación de π, ya que se prefiere mostrar otras series de arco tangente realizadas desde el hallazgo de John Machin, y poner en evidencia que muchos matemáticos e interesados en halla la mayor cantidad de cifras del número π optaron por trabajar con este tipo de series.

Otras series de arco tangente.

[18] Aunque en Arndt & Haenel, 2000, p. 70 se hace una breve explicación sobre como probar la fórmula (4.28), se escribe de manera general para ángulos α y β, teniendo en cuenta las restricciones del valor de los ángulos.

[19] Para este paso, tenga en cuenta que $\tan(\arctan x)=x$

Existen varios métodos para deducir fórmulas de arco tangente a partir de otras existentes. Una de esas se logra usando estas fórmulas: (Arndt & Haenel, 2000, p. 73)

$$\arctan\frac{1}{a-b} = \arctan\frac{1}{a} + \arctan\ \frac{b}{a^2-ab+1} \tag{4.40}$$

$$\arctan\frac{1}{a} = 2\arctan\frac{1}{2a} - \arctan\frac{1}{4a^3+3a} \tag{4.41}$$

Con la apropiada sustitución, se puede lograr la fórmula (4.28) con $a = 2$ y $b = 1$, y si se sustituye por $a = 3$ y $b = 1$, resulta la fórmula (4.38) deducida por Charles Hutton, que se mostrará siguiente a este párrafo. Usando este y otros métodos para deducir fórmulas de arco tangente a partir de otras, fueron descubiertas varios resultados especialmente para $\frac{\pi}{4}$. He aquí una selección de algunas fórmulas de arco tangente en orden cronológico, tomadas de hecha por Arndt & Haenel, 2000[20]:

$$\frac{\pi}{4} = 8\arctan\frac{1}{10} - \arctan\frac{1}{239} - 4\arctan\frac{1}{515} \tag{4.42}$$

Klingenstierna, 1730

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{7} \tag{4.43}$$

Hutton, 1776

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + 8\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239} \tag{4.44}$$

Gauss, 1863

$$\frac{\pi}{4} = 3\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{20} + \arctan\frac{1}{1985} \tag{4.45}$$

Loney, 1893

$$\frac{\pi}{4} = 6\arctan\frac{1}{8} + 2\arctan\frac{1}{57} + \arctan\frac{1}{239} \tag{4.46}$$

Stomer, 1896

Después de haber visto este recuento sobre las series de arco tangente, cabe aclarar que todas estas representaciones, aunque se pueden interpretar de manera gráfica, como lo

[20] Aunque este listado contiene más fórmulas de las que se muestran en el listado, se omiten para este trabajo debido a la falta de datos sobre su autor y año.

vimos en la imagen 4.1, pertenecen a una de representación simbólica, todas estas fórmulas contienen procedimientos y convenios para ser calculadas (tanto su forma de deducirlas, y sus resultados, usando las series de Gregory para los valores de arco tangente).

Anteriormente, vimos resultados que datan desde el año 1706 (la fórmula de John Machin) Hasta la última, que data a finales del siglo XVIII, y se acerca la época en que se dispara el hallazgo de cifras decimales del número π, pero antes de pasar a esto, sería bueno saber ¿cuál fue el último en realizar su cálculo de cifras decimales como lo habían hecho hace mucho tiempo?, es decir, lo que denominaríamos en la actualidad "a lápiz y papel", queriendo conocer esto, es el turno de hablar de William Shanks.

William Shanks

He aquí, según Arndt & Haenel (2000) y Posamentier & Lehmann (2004) la última persona que se empecinó a hallar la mayor cantidad de cifras decimales de π, y ni siquiera con un resultado propio, ya que usa la fórmula (4.33) (la fórmula de Machin) para realizar su trabajo en 1853; la historia de este personaje lo envuelven dos cosas importantes que seguramente no se ha mencionado atrás: una persistencia en hallar la mayor cantidad de cifras de π, ya que el trabajo realizado por Shanks tomó varios años, imagine hallar valores de arco tangente una y otra y otra vez, resolviendo muchísimas veces el mismo resultado a lápiz y papel para hallar su objetivo; y lo segundo, el error al que llegó y no descubrió por sí mismo, ya que se mencionan aproximaciones, representaciones fórmulas, pero se deja a parte esa esencia que nos hace humanos, el error. Este suceso se evidencia en varias[21] referencias relacionadas con este personaje, además de su tenacidad para hallar tantas cifras del número π.

Este matemático amateur Inglés, a mitad del siglo XVII calculó en total 707 cifras decimales de π, presentando en 1851 las primeras 315 de su producto, dos año más tarde ya había obtenido 607, y 20 años más tarde, ofreció al mundo supuestas 707 cifras decimales de π. En 1853 publica un libro (Arndt & Haenel, 2000, p. 195), en el cual no se encuentran

[21] Referido a toda la bibliografía consultada para el desarrollo de este trabajo, además de información básica que se encuentra en páginas web como https://es.wikipedia.org/wiki/William_Shanks, consultada el 15 de Octubre de 2015.

publicados todos los 607 dígitos que encontró, pero sí el procedimiento de cómo halló los primeros 530 de esos que ya tenía en aquel año. Desafortunadamente, según lo descrito en Aguirre (2001), William tuvo un error en sus procedimientos, y realizó un mal cálculo en la cifra 528, error que pasó desapercibido para el ojo de los que vieron este trabajo, hasta que en 1945, D.F. Ferguson en uno de los cálculos que realiza a mano para comprobar esto, llega a 530 cifras correctas.

Creo que no es necesario realizar una clasificación de la representación usada por Shanks, ya que es la misma que usó Machin, que ya fue descrita y clasificada anteriormente.

Antes de pasar a hablar sobre la era computacional, hay que resaltar a un genio Hindú, el cual descubre una serie cuya convergencia a π es extremadamente rápida, de hecho, es usada como algoritmo en algunas máquinas para calcular cientos y millones de cifras de este número; se trata de Ramanujan.

Srinivasa Ramanujan

Nace en el año 1887 en una familia humilde hindú. Hizo sus estudios ordinarios en la escuela pero al ingresar a la Universidad, fue rechazado por la prueba de acceso. A criterio de los autores de este trabajo, increíble no admitir en una Universidad a tan brillante personaje, pero es solo opinión.

En su estudio por las matemáticas descubre fórmulas extraordinarias y al escribirlas consulta con algunos matemáticos de su ciudad sobre sus descubrimientos y ellos manifiestan que es un trabajo brillante, así que decide enviarle su trabajo a Hardy.

Esta fue la carta de Ramanujan a Hardy, encontrada en un artículo de la revista Suma, llamado *Ramanujan y el número π* de Antonio Pérez Sanz del año 2008. La carta dice lo siguiente:

Estimado señor:

Me permito presentarme a Ud. como un contable del departamento de cuentas del Port Trust Office de Madrás, con un salario de 20 libras anuales solamente. Tengo 26 años de edad. No he recibido educación universitaria, pero he seguido los cursos de la escuela ordinaria. He hecho un estudio detallado de las series divergentes en general y los resultados a los que he llegado son calificados como sorprendentes por los matemáticos locales...

Querría pedirle el favor de que repasara los trabajos aquí incluidos. Si usted se convence de que hay alguna cosa de valor, me gustaría publicar mis teoremas, ya que soy pobre. No he presentado los cálculos reales ni las expresiones que he adoptado, pero he indicado el proceso que sigo. Debido a mi poca experiencia tendría en gran estima cualquier consejo que usted me diera. Pido que me excuse por las molestias que ocasiono.

Quedo, apreciado señor, a su entera disposición.

S. Ramanujan (Perez A. , 2008).

Donde al inicio, Hardy (el matemático a quien va dirigida la carta) se expresa escéptico y desconfiado, pero luego de estudiar las fórmulas se da cuenta del extraordinario trabajo de Ramanujan. Así que le pide a este hindú que se traslade a Cambridge para que puedan estudiar las matemáticas que hizo Ramanujan.

Así que él viaja a Cambridge gracias a los consejos que le daba su diosa Namagiri quien según él, le daba consejos en sus sueños para los cálculos matemáticos que hacía. Durante el viaje Ramanujan enfermó dado a las diferentes costumbres que tenían en Cambridge y al volver a su ciudad natal, murió (un hecho desafortunado que sólo le permitió vivir 32 años). En cuanto al cálculo de π Ramanujan hizo un excelente trabajo con las series, ya que por ejemplo la serie de Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} \tag{4.13}$$

Esta serie converge a π demasiado lento ya que al hacer los primeros cien productos el valor de π es igual a 3,1260789... el cual es número bastante alejado de los primeros decimales de π. (Perez A. , 2008).

Lo mismo sucede con la serie de Leibniz, así que Ramanujan hace una fórmula la cual converge sorprendentemente rápido, esta es:

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\cdot\left(\frac{(4\cdot 1)!\,(1103+26390\cdot 1)}{(1!)^4\cdot 396^{4\cdot 1}}+\frac{(4\cdot 2)!\,(1103+26390\cdot 2)}{(2!)^4\cdot 396^{4\cdot 2}}+\frac{(4\cdot 3)!\,(1103+26390\cdot 3)}{(3!)^4\cdot 396^{4\cdot 3}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\sqrt{8}}{9801}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4\cdot n)!\,(1103+26390\cdot n)}{(n!)^4\cdot 396^{4\cdot n}} \tag{4.47}$$

De ello se deduce que su fórmula no es absoluto en elemental ni sencilla de conocer su procedencia, sin embargo, no siempre recurre a las series, en otros hallazgos, encuentra un producto que resulta teniendo quince decimales de π, este es:

$$\frac{355}{113}\cdot\left(1-\frac{0.0003}{3533}\right)=3.14159265358979\ldots \tag{4.48}$$

Sin embargo, no solamente recurre a lo netamente algebraico sino que también halla una aproximación a partir de la geometría, dicha construcción se encuentra explicada en el Pérez (2008), su procedimiento fue el siguiente:

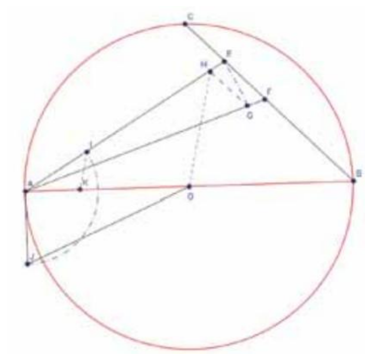

Imagen 4.2. Aproximación de π hecha por Ramanujan a través de la geometría. Tomado de *Ramanujan y el número π* de Antonio Perez Sanz del año 2008 (p. 108). http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/decabeza/57decabeza.pdf

- Construimos un círculo de centro O y radio la unidad. AB es su diámetro.
- C es el punto medio del arco ACB. Dividimos en tres partes iguales el radio OA para obtener el punto K, así:

$$AK = \frac{1}{3}$$

- Trazamos el segmento CB y sobre él desde C llevamos dos veces el segmento AK para obtener el punto E yu F. Así:

$$CE = \frac{1}{3} \qquad y \qquad CF = \frac{2}{3}$$

- Trazamos los segmentos AE y AF.
- Con radio AE trazamos un arco de circunferencia hasta que corte al segmento AF. Tenemos así el punto G. Por él trazamos una paralela a BC que cortará a AE en el punto H.
- Unimos el centro O con el punto H y trazamos una paralela a OH por el punto K. Esta recta corta a AE en el punto I.
- Con radio AI trazamos un arco de circunferencia que cortará a la recta tangente a la circunferencia en el punto A en un punto J.
- Por fin trazamos el segmento OJ.

Hecha la construcción, Ramanujan afirma que la media proporcional entre OA y OJ es aproximadamente un tercio de la semicircunferencia ACB. Hagamos los cálculos:

Longitud de $ACB = \pi \cdot r = \pi$

$$\frac{\pi}{3} = \sqrt{OA \cdot OJ} = \sqrt{OA \cdot OJ} = \sqrt{OJ} = \sqrt{\sqrt{OA^2 + AJ^2}} = \sqrt[4]{1 + AJ^2} \qquad (4.49)$$

Calculemos el valor de AJ.

$AJ = AI$. Los triángulos AIK y AHO son semejantes, por tanto

$$\frac{AI}{AT} = \frac{AH}{AO} \rightarrow \frac{AJ}{\frac{1}{3}} = \frac{AH}{1}$$

Por lo cual

$$AJ = \frac{1}{3} AH \qquad (4.50)$$

También son semejantes los triángulos AHG y AEF. Además $AE = AG$. Por tanto

$$\frac{AH}{AG} = \frac{AE}{AF} \rightarrow \frac{AH}{AE} = \frac{AE}{AF}$$

Es decir:

$$AH = \frac{AE^2}{AF} \qquad (4.51)$$

Calculemos AF y AE. Aplicando el teorema del coseno en el triángulo AFB tendremos:

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2 \cdot AB \cdot BF \cdot \cos 45°$$

Tendremos en cuenta que:

$$BC = \sqrt{2}, \qquad AB = 2, \quad BF = BC - CF = \sqrt{2} - \frac{2}{3}$$

Es decir:

$$AF^2 = 4 + \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 4 + 2 + \frac{4}{9} - \frac{4\sqrt{2}}{9} - 4 + \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{22}{9}$$

Aplicamos ahora el teorema del coseno en el triángulo AEB.

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2 \cdot AB \cdot BE \cdot \cos 45°$$

Ahora

$$BE = BC - CE = \sqrt{2} - \frac{1}{3}$$

Y por tanto

$$AE^2 = 4 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 4 + 2 + \frac{1}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{9} - 4 + \frac{2\sqrt{2}}{9} = \frac{19}{9}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (4.51) tendremos:

$$AH^2 = \left(\frac{AE^2}{AF}\right)^2 = \frac{AE^4}{AF^2} \frac{\frac{19^2}{9^2}}{\frac{22}{9}} = \frac{19^2}{9 \cdot 22}$$

Y sustituyendo en (4.50)

$$AJ^2 = \left(\frac{1}{3}AH\right)^2 = \frac{1}{9}AH^2 = \frac{19^2}{9 \cdot 9 \cdot 22} = \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}$$

Sustituyendo este valor en (4.49) tendremos

$$\frac{\pi}{3} = \sqrt[4]{1 + AJ^2} = \sqrt[4]{1 + AJ^2} = \sqrt[4]{1 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}} = \sqrt[4]{\frac{1}{9^2}\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}}$$

Y por tanto

$$\pi \approx \sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}} = \sqrt[4]{81 + \frac{361}{22}} = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = \sqrt[4]{97.4090909} = 3.141592652 \qquad (4.52)$$

Ello muestra un increíble método por parte de Ramanujan con una aproximación bastante original a través de la geometría. Es por esta obra y los cientos de fórmulas que aproximan a π que ahora se cuestiona el titúlo de Arquímedes como el *padre de* π. Siendo que Ramanujan encontró muchísimas aproximaciones para este número.

Las representaciones encontradas en el trabajo de Ramanujan en su mayoría son simbólicas dado que la cantidad de series que hace para π son innumerables, sin embargo, se presenta una representación gráfica para una nueva aproximación (es una buena aproximación en relación con lo presentado por los antecesores a Ramanujan) de π.

Ahora, llega el momento de hablar sobre la llegada de los computadores a las aproximaciones de π, pero antes de continuar, es de importancia resaltar lo siguiente:

Al inicio de elaborar este trabajo, se consideraba al ordenador como otro tipo de representación, pero al ir indagando, y elaborando este trabajo, se llega a una conclusión importante: No se puede considerar la programación de las máquinas como una manera de representar π, ya que lo que se programa es un algoritmo que ya se ha establecido anteriormente, se escribe, en otro lenguaje, una representación que ya estaba, es por esto que el ordenador juega un papel muy importante en la aproximación de π, pero no como una representación, sino como potenciadores para hacer que las representaciones potentes (que convergen más rápido) puedan reflejar su verdadero potencial: hallar cientos, miles y millones cifras decimales del número en cuestión en poco tiempo.

La era del computador

Era el final de los 40's, cuando se produjo la primera máquina considerada computador: la ENIAC, y con ella, la primera aproximación asombrosa del número π, hablando de la cantidad de cifras decimales que se encontraron, usando una fórmula que data más de 200 años atrás de esta megaconstrucción[22]: La fórmula de John Machine.

Antes de mencionar la cantidad de cifras, se hará una breve descripción de la máquna como tal, para que el lector tenga una idea de cómo era esta famosa máquina en aquel entonces: *"(…) fue el resultado de un acuerdo, a comienzos de la Segunda Guerra Mundial, entre el Laboratorio de Investigación Balística del Departamento de Defensa de EEUU y la Moore School de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Pensilvania. La máquina era un amasijo de más de 17.000 válvulas de vacío, 1.500 relés, 10.000 condensadores, 70.000 resistencias y 5 millones de soldaduras. Sus 27 toneladas, repartidas en 167 metros cuadrados, fueron presentadas a la prensa el 15 de febrero de 1946. (…)"* Luque (2006).

En 1949, esta máquina fue programada para calcular 2037 cifras decimales de π usando la fórmula de John Machin (4.35). El cálculo estimado tomó 70 horas (es decir, un poco más de 2 minutos por cifra (recuerde que el resultado más grande registrado en este trabajo fue de 530 cifras, y tomó más de un año realizar esto). F. E. Felton quiso llegar al resultado de 10000 cifras decimales con esta máquina (Arndt & Haenel, 2000, p. 197), pero la máquina solamente ('solamente', teniendo en cuenta los resultados anteriores) calculó 7.480. Este objetivo, de las 10.000 cifras lo logró F. Genuys, pero en la máquina IBM 704, en tan solo 100 minutos.

[22] Se refiere así, ya que se describe que esta máquina requería un espacio de 167 metros cuadrados para su funcionamiento. Información recopilada de http://www.dmae.upm.es/WebpersonalBartolo/articulosdivulgacion/Iconos/ENIAC.pdf, 25 de Octubre de 2015.

De aquí en adelante, la carrera comenzó por obtener cantidad de cifras decimales de π en poco tiempo, gracias a las máquinas: dos investigadores de IBM, usando la IBM 7090, calcularon 100.000, y tardaron solamente 8 horas y 43 minutos; los autores de este trabajos fueron Daniel Shanks[23] y John Wrernch Jr. Para esta aproximación se usaron dos fórmulas de arco tangente ya expuestas anteriormente: La fórmula de Gauss de arco tangente (4.44) y la de Stomer (4.46). En 1973 se logró encontrar 1 millón de cifras decimales y tomó sólo un día, gracias a la computadora CDC 7600.

Máquinas más poderosas fueron surgiendo a través de los años, y así mismo aproximaciones con más cifras decimales, usando diversos algoritmos expuestos en este trabajo. A continuación, se muestra un cuadro donde se relaciona el autor, el año, el número de cifras decimales hallados, el algoritmo usado, el tiempo y el computador empleado para esto:

Quien	**Cuando**	**Cifras decimales**	**Algoritmo[24]**	**Tiempo**	**Computador**
Reitwiesner	1949	2.037	M	70 horas	ENIAC
Nicholson, Jeenel	1954	3.092	M	0:13 horas	NORC
Felton	1957	7.480	K	33 horas	Pegasus
Genuys	1958	10.000	M	1:40 horas	IBM 704
Felton	1958	10.002	K	33 horas	Pegasus
Guilloud	1959	16.167	M	4:18 horas	IMB 704
Shanks, Wrrench	1961	100.265	S	8:43 horas	IBM 7090
Guilloud, Fillatre	1966	250.000	G	41:55 horas	IBM 7030
Guilloud	1967	500.000	G	28:10 horas	CDC 6600
Guilloud, Boyer	1973	1.001.250	G	23:18 horas	
Miyoshi Kanada	1981	2.000.000	K	137:18 horas	FACOM
Guilloud	1981-82	2.000.050			
Gosper	1985	17.526.200	R		Symbolics

Cuadro 4.1. Aproximaciones hasta inicios de los 90', teniendo en cuentas las representaciones expuestas hasta el momento. Tomado de (Arndt & Haenel, 2000, p. 206).

[23] No tiene relación con William Shanks

[24] La nomenclatura significa lo siguiente: M: Fórmula de Machin (4.35), G: Gauss (4.44), K: Klingenstierna (4.42), S: Stomer (4.46), R: Ramanujan (4.47)

Y la carrera por llegar a la mayor cantidad de cifras del número π continúa; actualmente ya se conocen billones de cifras decimales, pero a medida que avanza la tecnología, el hombre se acerca, o está cada vez más lejos, a encontrar más cifras de este número.

A continuación, se muestra un cuadro a manera de resumen de las representaciones plasmadas en este capítulo, dodne se indica el año en que se conoció, el autor o los autores de ese trabajo, la aproximación a la cual llegaron, y el tipo de representación que se usó:

Año	Autor(es)	Aproximación de π	Tipo de representación
Siglo XV	India (Nilakantha)	$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3^1} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \cdots\right)$ $\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots \mp \frac{1}{p-1} \pm \frac{\frac{p}{2}}{p^2+1}$ $\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots \mp \frac{1}{p-1} \pm \frac{\frac{p^2}{4}+1}{\frac{p}{2}\left(p^2+4p-1\right)}$ $\frac{\pi}{16} = \frac{1}{1^5+4\cdot 1} - \frac{1}{3^5+4\cdot 3} + \frac{1}{5^5+4\cdot 5} - \frac{1}{7^5+4\cdot 7} + \cdots$ $\pi = 3 + \frac{4}{3^3-3} - \frac{4}{5^3-5} + \frac{4}{7^3-7} \ldots$ $\pi \approx 2 + \frac{4}{2^2-1} - \frac{4}{4^2-1} + \frac{4}{6^2-1} - \cdots \mp \frac{4}{p^2-1} \pm \frac{4}{2\left(p+1\right)^2+4}$ $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{10^2-1} + \frac{1}{14^2-1} + \cdots$ $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4^2-1} - \frac{1}{8^2-1} - \frac{1}{12^2-1} - \frac{1}{16^2-1} - \cdots$	Simbólica
1597	Francois Vieté	$3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926537$ $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots$	Simbólica
1593	Adriaen Van Roomen	15 cifras decimales de π	Simbólica
1596 y 1610	Ludolph van Ceulen	20 cifras decimales de π 35 cifras decimales de π	Simbólica
1621	Wildebrod Snell	34 cifras decimales de π	Simbólica

1665	John Wallis	$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1 \quad 2n+1}{2n \quad 2n+1} = \frac{\pi}{2}.$	Simbólica
1658	William Brouncker	$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cdots}}}$	Simbólica
1674	Gregory – Leibniz	$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots$	Simbólica
1706	John Machin	$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{239}$	Simbólica
1730	Klingestierna	$\frac{\pi}{4} = 8\arctan\frac{1}{10} - \arctan\frac{1}{239} - 4\arctan\frac{1}{515}$	Simbólica
1736[25] y 1738[26]	Leonhard Euler	$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} \ldots$	Simbólica

[25] Aquí se refiere a la fecha de presentación de su serie (4.24), los demás son trabajos que datan sin fecha, pero no deben ser muy lejanos a esta.
[26] Referido a la fórmula de arco tangente

		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{32}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2}{n^2} = \frac{\pi^4}{72}$ $\prod_{p} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \frac{\pi^2}{6}$ $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ $\pi = \frac{\ln(-1)}{i}$	
1776	James Hutton	$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{7}$	Simbólica
1853	William Shanks	527 cifras decimales de π	Simbólica
1863	Carl F. Gauss	$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + 8\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239}$	Simbólica
1893	Loney	$\frac{\pi}{4} = 3\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{20} + \arctan\frac{1}{1985}$	Simbólica
1896	Stomer	$\frac{\pi}{4} = 6\arctan\frac{1}{8} + 2\arctan\frac{1}{57} + \arctan\frac{1}{239}$	Simbólica

1914[27]	Ramanujan	$\frac{1}{\pi} = \frac{\overline{8}}{9801} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot n \; ! \; 1103 + 26390 \cdot n}{n! \; ^{4} \cdot 396^{4 \cdot n}}$ $\frac{355}{113} \cdot \; 1 - \frac{0.0003}{3533} \; = 3.14159265358979 \ldots$ $\pi \approx= 3.141592652$	Simbólica - gráfica

[27] Esta fecha refiere a la primera representación, a la sumatoria.

Después de haber expuesto algunas representaciones del número π como resultado de querer hallar la mayor cantidad de cifras de él, o una fórmula para hallar su valor; queda en evidencia algunas cosas:

Primero, se pueden reconocer tres momentos cruciales en el momento de querer hallar la mayor cantidad de cifras del número π: Por medio de polígonos (ya generalizado por Arquímedes, y método que perduró hasta más de 1500 años), las expresiones infinitas, que hacen su aparición en la India y posteriormente en la matemática occidental con el resultado de Vieté, y por último, las fórmulas de arco tangente, que permiten calcular una cantidad abrumadora de cifras con la introducción del computador a finales de la segunda guerra mundial; en el primer momento no hay más que decir respecto al método de Arquímedes, se combina trigonometría con dicho método para calcular la mayor cantidad de cifras posibles del número π, siendo el mayor resultado 35 cifras decimales, según lo consultado, en el segundo momento surgen trabajos conforme la rama del cálculo y el trabajo en expresiones infinitas avanza, hasta que se logran fórmulas de arco tangentes muy efectivas para hallar cifras decimales de π (salvo el trabajo de Ramanujan, cuya serie también es usada en ordenadores).

La era del computador permitió acelerar la búsqueda de decimales de este número de manera abrumadora, pasando de tener algo más de 500 cifras decimales, a tener más de 500 millones, y el proceso sigue en aumento, considerando las máquinas tan potentes que hay en este momento a comparación de la ENIAC o las primeras IBM.

Los aportes para hallar la mayor cantidad de cifras del número π no parece ser solamente labor de occidente, como se evidenció en el capítulo 4, también hay resultados de Oriente medio y el lejano oriente importantes para el desarrollo histórico de π, de hecho, la serie de ramanujan no se compara (en la manera en que converge a π) a ninguna otra serie o expresión infinita desarrollada antes de 1700.

Capítulo 5

Importancia de las representaciones desde la didáctica de las matemáticas

Se ha observado en el desarrollo hasta ahora de este trabajo de grado diversas representaciones del número π, y se ha realizado una clasificación a partir de una propuesta desde la didáctica de las matemáticas. Pero surgen algunos interrogantes al realizar toda esta labor: ¿qué importancia tiene todo este trabajo, de buscar representaciones distintas de un objeto matemático para un profesor de matemáticas?, "¿será que es necesario tener diversos tipos de representaciones del número π?".

Para dar inicio a esta breve argumentación, cabe resaltar que hablar de representaciones en la didáctica de las matemáticas, no es nuevo, y tampoco es algo sencillo, como se evidenció en el capítulo 1. Hay diversos autores los cuales han dedicado diversos trabajos (Janvier, 1987; Goldin, 1998; Cobb, Yackel y McClain, 2000; Golding, 2002; Hitt, 2002;…, Citados en Font, Godino, D'Amore, 2007), lo que muestra no solo la importancia de este tema en la educación matemática, sino también su complejidad; es por eso que se enuncia que se dará una argumentación corta, ya que intenta dar pregunta a las preguntas iniciales.

Si se habla sobre el aprendizaje de un concepto matemático por parte de un estudiante, en realidad no lo hace con el objeto matemático como tal, sino con alguna representación semiótica en particular (Macías, 2014), ya que no puede tener un acceso directo al objeto como tal, es por eso que por medio de las representaciones es comprensible un objeto matemático, esto refleja el por qué el querer tratar y avanzar respecto a un concepto matemático, si se pusiera como ejemplo al número π, conduce inmediatamente al estudio y desarrollo de diversos sistemas de representación del mismo; en este punto recae la importancia del contenido de las representaciones y aproximaciones de π diferentes a la desafortunada 'popular' π=3,1416.

Duval (2006) citado por Macías (2014) también menciona que lograr una distinción entre el objeto matemático a estudiar y su representación y sea capaz de primero, reconocer el objeto a través de distintas representaciones cuyos contenidos no tienen nada que ver entre sí (representación gráfica y simbólica), y segundo, reconocer dos objetos matemáticos que usan una representación similar; es necesario hacer uso de diferentes tipos de representación y mostrar el aporte de cada una (ejemplo: hablar sobre el intento de la cuadratura del círculo mostrada en el capítulo 3).

Indagar sobre representaciones de algún objeto matemático no es solamente reconocer la manera de representarlo, es también tener en cuenta que dichas representaciones han sido el producto de siglos de evolución a través de la historia, por ejemplo, el sistema de numeración decimal (Chamorro, 2004; citado en Macías, 2014), sistema de representación que da como resultado la noción de número, no es solo resultado de algunos años atrás, es producto de una larga evolución histórica; desde el uso de palillos, cortes, conchas o muescas talladas en un palo que usaban nuestros antecesores que datan en la prehistoria, y que aún es usado por algunas tribus del amazonas. Si se hace el paralelo con lo evidenciado hasta el momento en este trabajo, se observa que el número π no fue una ocurrencia de aquel personaje que lo denotó y enunció en su libro Introductio in analysin infinitorium , ni siquiera se puede decir que comenzó con Arquímedes; la evolución del número π data de cientos de años antes de Cristo, y en la actualidad nos sigue dando ‘de que hablar’.

Con esta pequeña indagación, se busca, además de intentar dar respuesta a las preguntas estipuladas en el inicio del capítulo, inquietar al lector acerca de la importancia que poseen múltiples representaciones de un objeto matemático, lo que puede significar para una clase de matemáticas donde se vea involucrado, en este caso en específico el número π, y los grandes aportes que podrían brindar estas aproximaciones que se han expuesto.

Conclusiones

Indagar acerca de un objeto matemático en su recorrido histórico no es una labor fácil, y más cuando se trata de algo lo cual se encuentra bastante información, y hay que saber qué elegir y cómo elegir dicha información. Este trabajo permite realizar un barrido histórico acerca de algunas representaciones del número π, algunas aproximaciones a las cuales se llegaron, y en algunas cómo fue que surgieron, el cual arroja las siguientes conclusiones:

Cuando se trabaja en matemáticas, los resultados pueden darse en diversos contextos, en particular, cuando se trabaja alrededor de π como un resultado de otro trabajo, permite poner en evidencia que surgen resultados de un objeto matemático a partir de varias situaciones: resolviendo un problema puntual de la matemática como el área del círculo, un problema físico que inquieta a una civilización, o a creencias religiosas y culturales inmersas en construcciones y veneraciones a dioses; siendo cada uno de éstos un factor importante no solo para resolver un problema en específico, sino el surgimiento de nuevos conocimientos matemáticos que siguen labrando sus conceptos e intrigas a lo largo de la historia.

Sin necesidad de observar el siglo XXI, se puede evidenciar a través de este recorrido histórico que π está inmerso en muchos campos de estudio diferentes a la matemática, fue de interés para inventores, poetas, físicos, sin siquiera proponerlo por alguna persona, simplemente π surgió allí, y en todos esos campos de estudio donde estuvo presente, obtuvo más resultados para afianzar el conocimiento sobre este objeto matemático.

Dividir las representaciones indagadas y estudiadas en dos capítulos, permitió marcar una diferencia temporal en la cual, como ya se hizo mención, el hombre crea matemática a partir de problemas que se presentan, y cuando el hombre se interesa por ese objeto matemático, sabe que está allí, pero su angustia por saber qué es lo lleva a buscar tantas cifras cómo es posible, usando las herramientas que le brinda su tiempo; no se puede decir que John Machin fue mejor en su trabajo con π que Arquímedes, si no se hace solo referencia a la cantidad de cifras que aproximó, ya que los conocimientos eran distintos, los propósitos también los eran, y además, el limitante o virtuoso (porque sin tenerlo, se debe crear) conocimiento matemático que se tenga en cada época.

Hablar de π como un objeto de estudio, no significa dejar atrás lo hecho por los personajes cuyo problema inicial no era el número; ya que, por ejemplo, el método de Arquímedes perduró por más de 1500 años; a pesar que su problema era distinto, y la época muy diferente a la de Van Ceulen, o Van Roomen; el personaje griego ya había realizado un aporte en las matemáticas, porte que era muy efectivo para que otros matemáticos hallaran lo que querían: cifras decimales de π (hasta que llegaron métodos más precisos); es allí cuando toma fuerza lo mencionado en el capítulo cinco, en que un sistema de representaciones de un objeto matemático no surge de un momento a otro, en este caso, tomó aproximadamente 1800 años para que el hombre se percatara que habían otro tipo de matemáticas que le permitían avanzar más rápido hacia su objetivo, y le tomó más de 20 siglos para crear un artefacto que lograra en horas, lo que algunos lograron en meses, o incluso años, usando una misma fórmula.

Bibliografía

Anónimo. (s. f.). *El hechizo de un número trascendente.* Obtenido de wikispaces: http://dia-mundial-numero-pi.wikispaces.com/file/view/historia+de+pi.pdf

Arndt, J., & Haenel, C. (2000). *Pi: Unleashed.* Berlin: Springer.

Borwein, J. (24 de Junio de 2011). *The Life of Pi: From Archimedes to Eniac and Beyond.* Obtenido de SCIPP (Santa Cruz Institute for Particle Physics): http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph116A/pi-2010.pdf

Boyer, C. (1991). *A history of mathematics.* New York, Toronto: Jhon Wiley & Sons, INC. .

Capitán, M., & Piera, C. (2006). *Historia de las Matemáticas: El número Pi.* Obtenido de Cipri Santiago Zaragoza: http://cipri.info/resources/HIST-Historia_De_Las_Matematicas-El_Numero_Pi.pdf

Cilleruelo, J. (2007). El diablo de los números. *La gaceta de la RSME*, 159-178.

Collette, J. (2002). *Historia de las matemáticas I.* Francia: siglo veintiuno editores, s. a. de c. v.

Deulofeu, J., & Figueiras, L. (2002). *Las medidas a través de la historia.* Obtenido de Matemátiques I, UAB.: http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4701/lfo2de2.pdf;jsessionid=C5656A6AD8FC2B0A4451A0B11D432E5B.tdx1?sequence=2

Deulofeu, J., & Figueiras, L. (2002). *Las medidas a través de la historia.* Recuperado el 15 de Septiembre de 2015, de Tesis doctorales en red.: http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4701/lfo2de2.pdf?sequence=2

García, B., & López, P. (1998). *Historia del antiguo Egipto.* Recuperado el 23 de Octubre de 2015, de MERCABÁ: http://www.mercaba.org/SANLUIS/Historia/Universal/1%20-

%20%C3%89pocas%20y%20temas/Egipto/Grimal,%20Nicolas%20-%20Historia%20del%20antiguo%20Egipto.pdf

Gourdon, X., & Sebah, P. (13 de Agosto de 2010). *pi and its computation through the ages.*

Hernández J., Salgado S. (2010-2011). *El racionalismo de Descartes.* Obtenido de DUERERÍAS – Cuadernos de Filosofía: http://guindo.pntic.mec.es/ssag0007/filosofica/Descartes.pdf

Hofmann, J. (2002). *Historia de la matemática: desde el comienzo hasta la Revolución Francesa.* Estados Unidos de América: Limusa.

Imagen, 3.-1. (s.f.). *Ubicación geográfica de Babilonia.* Recuperado el 10 de Octubre de 2015, de https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/72/Babilonia_de_Hammurabi-ES.svg/270px-Babilonia_de_Hammurabi-ES.svg.png

Imagen, 3.-1. (s.f.). *Ubicación geográfica de China.* Recuperado el 17 de Septiembre de 2015, de http://www.aqualia-infraestructuras.es/media/fotos/Shanghai.gif

Imagen, 3.-1. (s.f.). *Ubicación geográfica de Italia antigua.* Recuperado el 19 de Octubre de 2015, de http://teoriasdelestado.wikispaces.com/file/view/italia_del_renacimiento.png/116364547/italia_del_renacimiento.png

Imagen, 3.-1. (s.f.). *Ubicación geográfica de Kazhagistan.* Recuperado el 11 de Octubre de 2015, de http://3.bp.blogspot.com/-_Kouw6h-YBM/VC60HSSkJbI/AAAAAAAAMMM/HiAbOwc6RJ8/s1600/mapauzbekistan.gif

Imagen, 3.-3. (s.f.). *Ubicación geográfica de Egipto antiguo.* Recuperado el 25 de Octubre de 2015, de http://3.bp.blogspot.com/-WtkPFbgLkxg/Td7pSaGQaVI/AAAAAAAABAQ/BgWAeWn4BHs/s1600/MAPA.png

Imagen, 3.-4. (s.f.). *Ubicación geográfica de la India antigua.* Recuperado el 5 de Octubre de 2015, de XWuSRGgpn8o/TYvl3ZoznVI/AAAAAAAAAAU/CxOxwelqVsA/s1600/Dibujo2.bmp

Imagen, 3.-5. (s.f.). *Ubicación geográfica de la India.* Recuperado el 12 de Septiembre de 2015, de http://www.sabelotodo.org/arquitectura/imagenes/india.jpg

Imagen, 3.-6. (s.f.). *Ubicación geográfica de Grecia.* Recuperado el 13 de Septiembre de 2015, de http://www.elaceite.net/wp-content/uploads/mapa_grecia.gif

Imagen, 3.-9. (s.f.). *Ubicación geográfica de China antigua.* Recuperado el 17 de Septiembre de 2015, de http://socialesvi.bligoo.com/media/users/22/1138876/images/public/310836/china.png?v=1347743666864

Jiménez, P. (s.f.). *EL VALOR DE PI SEGÚN LOS BABILONIOS.* Obtenido de Cimat: http://www.cimat.mx/archivos/PortaldeTransparencia/ext/pi1.pdf

Montero, L. (s.f.). *Babilonia y Nabucodonosor: Historia antigua y tradición viva.* Recuperado el 21 de Octubre de 2015, de Museo Arqueológico de Lorca: http://www.amigosdelmuseoarqueologicodelorca.com/alberca/pdf/alberca5/11-5.pdf

Olave, M., & Dalcín, M. (s.f.). *Las preguntas de Arquímedes.* Ediciones Palíndromo.

Perez, A. (Febrero de 2008). Ramanujan y el número pi. *Revista Suma.*, 105-109.

Perez, A. (2008). Ramanujan y el número pi. *Suma*, 105-109.

Posamentier, A., & Lehmann, I. (2004). *A Biography of the World's Most Mysterious Number.* New York: Prometheus Books.

Posamentier, A., & Lehmann, I. (2004). *A Biography of the World's Most Mysterious Number.* Prometheus Books.

Rico, L. (2009). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática.* Obtenido de Dialnet: https://www.google.com.co/?gfe_rd=cr&ei=6FIKVYPYO-mlsQfU9IGwDQ&gws_rd=ssl#q=SOBRE+LAS+NOCIONES+DE+REPRESENTACI%C3%93N+Y+COMPRENSI%C3%93N+EN+LA+INVESTIGACI%C3%93N+EN+EDUCACI%C3%93N+MATEM%C3%81TICA

Sánchez, J. (s. f.). *La matemática de la India.* Recuperado el 15 de Octubre de 2015, de Departamento de matemáticas, Universidad de Castilla: http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/4/4_matematica_india.pdf

Stepanenko, P. (2004). El problema de las representaciones subjetivas en Kant. *Revista Digital Universitaria.*, 2-9.

Universo Matemático, L. a. (2000). Historia de π. España.